

Forovermodellering og inversjon av 3D og 4D CSEM-data basert på integralligningsmetoder

Anne Stav



Master i petroleumsgeofag

Institutt for Geovitenskap

Universitetet i Bergen

Juni 2010

Sammendrag

Elektromagnetiske undersøkelser blir benyttet i letesammenheng for å skille mellom vann- og hydrokarbonfylte prospekt, og dermed øke sannsynligheten for å finne hydrokarboner. I for-overmodellering, benyttes ulike integralligningsmetoder til beregning av det elektromagnetiske feltet i mottakere på havbunnen for en gitt konduktivitetsmodell og undersøkelsesgeometri. Born-approksimasjonen og statisk lokalisert ikke-lineær approksimasjon (SLN) er to tilnærminger av integralligningen. På grunn av sine lineære egenskaper, kan tilnærmingsmetodene benyttes til lineær inversjon av det elektromagnetiske feltet for å bestemme konduktivitetsverdier i en gitt reservoarmodell. I denne masteroppgaven undersøkes gyldigheten til de to metodene for et reservoar i produksjon, hvor SLN er forventet å bedre tilnærminger av EM-feltet over større konduktivitetskontraster mellom reservoaret og bakgrunnsmodellen, og for større reservoarvolum, sammenlignet med Born-approksimasjonen. Numeriske eksempler viser stabiliteten til SLN for store kontraster, men feltberegningene for reservoaret undersøkt gir store avvik mellom både Born- og SLN-tilnærmingen sammenlignet med den fulle integralløsningen.

For å undersøke stabiliteten og kvaliteten til lineær inversjon av EM-feltet med tilnærmingsmetodene, utføres syntetiske eksperimenter med ulike typer støy og modellfeil. På grunn av lave frekvenser i EM-målinger, vil oppløsningen i den inverterte modellen være lav, inversjonsresultatene klarer ikke å gjengi den korrekte vannfronten med støy tilstede i dataene. Inversjon av SLN-genererte data ved Born metoden, gir gode inversjonsresultater av 4D-anoamlier, men for feltmålinger i et gitt tidspunkt er de estimerte modellparametrene ubrukelig. Med hensyn til repeterbarhet i undersøkelsene, viser de syntetiske eksperimentene å gi ustabile inversjonsresultat dersom det er feil i mottakerposisjonene til de repeterte undersøkelsene relativ basis målingene. Det anbefales derfor faste mottakerinstallasjoner for å kunne bruke 4D-CSEM til reservoarovervåking. Målinger over tette tidsintervall gir også bedre inversjonsresultat for SLN-genererte data, på grunn av små volum- og kontrastendringer i 4D-anomalien.

Forord

Denne oppgaven ble utført ved Institutt for geovitenskap, Universitetet i Bergen, under veiledning av førsteamanuensis Morten Jakobsen.

Det har vært en lang prosess å komme frem til resultatene lagt frem i denne masteroppgaven. Da oppgavetittelen ble valgt, var elektromagnetisk havbunnslogging et nytt begrep for meg. Etter 2 år med forberedelse, forskning og eksperimenter har jeg kommet frem til et resultat jeg er stolt av.

Først vil jeg takke Morten Jakobsen og min biveileder Trond Mannseth for mange gode ideer, innspill og samtaler underveis i arbeidet. Jeg vil takke Universitetet i Utah for MATLAB-programmet INTEM3D benyttet til modellering av elektromagnetiske felt i kapittel 4 og doktorgradstudent Ali Shahraini ved UiB for reservoarmodellen benyttet både under modellering og inversjon for et reservoar under produksjon.

Jeg vil takke min familie for moralsk og økonomisk støtte gjennom studiet, og for retting av oppgaven den siste tiden. Til slutt vil jeg takke mine medstudenter, gode venner og min kjæreste for mange fine stunder og samtaler i løpet av mine år som student på institutt for Geovitenskap.

Anne Stav

Bergen, 1. juni 2010

Innhold

1	Innledning	1
2	Elektromagnetisme	5
2.1	Elektrisk ledningsevne	5
2.1.1	Archies lover	7
2.2	Maxwells ligninger	8
2.2.1	Generalisering av Amperes lov	9
2.2.2	Generalisering av Faradays lov	10
2.2.3	Gauss lov for det elektriske feltet	11
2.2.4	Ingen magnetiske monopoler	11
2.2.5	Materiallover	12
2.3	Bølgeligning for EM-bølger	12
2.3.1	Integralligning	15
2.4	Born-approksimasjonen	17
2.5	Statisk lokalisert ikke-lineær tilnærming	18
2.6	Diskretisering	20
3	Parameterestimering og inverse problem	23
3.1	Innledning	23
3.2	Løsning av lineære inverse problem	25
3.2.1	Minste kvadraters løsning	25
3.2.2	Komplekse tall	26
3.2.3	Statistiske betraktninger og vektete minste kvadrater	26
3.2.4	Singulær verdi dekomposisjon	28
3.3	Tikhonovregularisering	29
3.4	Total variasjon (TV)	30
3.5	Valg av regulariseringsparameter	31
3.5.1	Generalisert kryssvalidering	31

3.5.2	L-kurve prinsippet	32
3.6	Analyse av det inverse problemet	33
4	Forovermodellering av 3D og 4D CSEM-data	35
4.1	Forovermodellering med integralligningsmetoder	35
4.2	Konduktivitetsmodell og forovermodelleringsparametre	36
4.2.1	Numerisk eksempel	38
4.2.2	Gridcellestørrelsen	43
4.3	Effekt av kontrast	44
4.3.1	Numerisk eksempel med varierende $\Delta\sigma$	47
4.4	Forovermodellering av 4D CSEM-data	48
4.4.1	Numerisk eksempel	50
4.5	Oppsummering	54
5	Inversjon av 3D og 4D CSEM-data	57
5.1	Modell	57
5.2	Syntetiske eksempel med inversjon av 3D CSEM-data	58
5.2.1	Støyforplantning fra $t(\Delta\sigma)$ til $\Delta\sigma$	61
5.3	Syntetiske eksempel med inversjon av 4D-differansedata	68
5.3.1	Støy i dataene fra basis- og repeterte undersøkelser	69
5.3.2	“Stacke” data	72
5.3.3	Numerisk eksempel med støy på 4D-differansedata	73
5.3.4	Støyforplantning fra $t(\Delta\sigma)$ til $\Delta\sigma$	81
5.4	Feil i 4D CSEM-inversjon og forbedringer	81
5.4.1	Numeriske eksempel	86
5.4.2	Endre frekvens, konstant reservoardyp	88
5.4.3	Endre reservoardyp med $f = 0.75$ Hz	88
5.4.4	Repeterbarhet og feil i mottakerposisjon	93
5.5	Bergartsfysisk inversjon til vannmetning	95
6	Diskusjon og konklusjon	99
6.1	Forovermodellering	99
6.2	Inversjon i syntetisk eksempel	100
A	Matlab koder	103

Kapittel 1

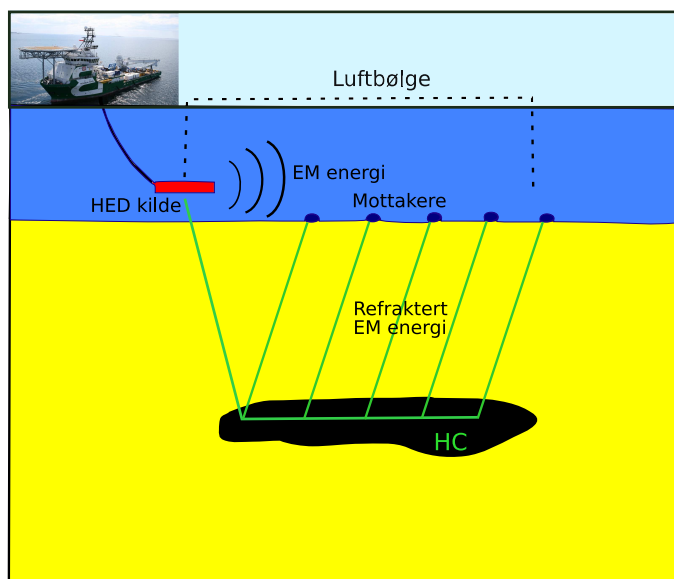
Innledning

Generelle begrep og definisjoner

Marine “Controlled Source” elektromagnetiske (CSEM) undersøkelser har de siste årene blitt et viktig verktøy til bruk i leting etter hydrokarboner (Ellingsrud et al., 2002; Eidesmo et al., 2002; Johansen et al., 2005; Hoversten et al., 2006; Constable og Srnka, 2007; Norman et al., 2008). I relativt tynne lag (10-50 meter) med høy resistivitet (ca 20-500 Ωm), vil EM-feltet bevege seg med høyere hastighet og mindre demping sammenlignet med feltet i omliggende ledende medier (Bhuyian, 2009). CSEM benyttes sammen med seismikk for å redusere usikkerheten før brønnboring, og dermed øke sjansene for å finne olje (Hesthammer et al., 2010).

Figur 1.1 illustrerer en marin CSEM-undersøkelse, og viser ulike gangveier feltet beveger seg fra kilden til mottakerne. Kilden kan være en 100-300 meter lang horisontal elektrisk dipol-antenne (HED) som sender ut lavfrekvent elektromagnetisk energi ved bruk av vekselstrøm, 40-50 meter over havbunnen (Ellingsrud et al., 2002). Det er viktig med god geologisk kunnskap i undersøkelsesområdet for å ta hensyn til andre høyresistive materialer, som for eksempel vulkanske bergarter, salt og kalkstein (Hesthammer et al., 2010). Ny forskning har undersøkt bruken av CSEM i forbindelse med 4D-og reservoarovervåking (Lien og Mannseth, 2008; Zach et al., 2009; Orange et al., 2009), med formål å kunne bruke 4D CSEM for å beregne metningsendringer, og skille mellom ulike dreneringsmønstre.

Geometrien på mottakerrekken er avgjørende for hvor godt det mottatte signalet registreres. Den kan uttrykkes ved hjelp av kilde-mottaker asimut, vinkelen mellom dipolaksen til kilden og linjen mellom kilde og mottaker (se figur 1.2). Ved ren innlinje geometri (Eidesmo et al., 2002) dominerer transvers magnetisk (TM) modus, hvor det magnetiske feltet er polarisert i horisontalplanet. I TM-modus vil galvaniske effekter danne et elektrisk felt som entrer et

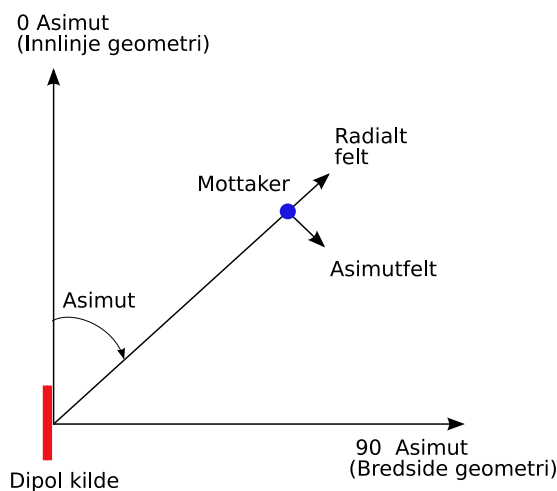


Figur 1.1: En marin CSEM-undersøkelse hvor en dipolkilde blir slept over en rekke mottakere plassert på havbunnen. Ved et hydrokarbonfylt reservoar vil elektromagnetisk energi bevege seg langs hydrokarbonlaget, og stadig refrakteres tilbake til mottakerne på havbunnen.

horisontalt hydrokarbonfylt reservoar med kritisk vinkel. Det elektriske feltet vil bevege seg langs laget og kontinuerlig sende tilbake energi til overflaten. Dette gir et sterkt bidrag til feltet som registreres på havbunnen med sine vertikale strømningskomponenter (Chave et al., 1990). For større asimut, vil transvers elektrisk (TE) modus etter hvert dominere. Det elektriske feltet beveger seg da i horisontalplanet. I TE-modus vil det elektriske feltet avhenge av induktivt koblede strømmer, og feltet vil kun reflekteres fra det ikke-ledende laget.

I forbindelse med 4D-innsamlinger, er det viktig å ha god repeterbarhet i målingene. For å kunne bruke 4D-anoamlier til å karakterisere strømningsmønstre, må geometrien i nye målinger være mindre enn 5% feil i forhold til basisundersøkelsen (Orange et al., 2009; Zach et al., 2009). Grunne ikke-ledende volum påvirker EM-feltet, spesielt i tilfeller når en mottaker er feilplassert like ovenfor. Endringer i infrastrukturen over et reservoar under produksjonstiden, for eksempel nye rørledninger som installeres på havbunnen, gir samme effekt. For å unngå falske anomalier, bør mottaker/kilde posisjoner plasseres med 5-10 meters nøyaktighet (Orange et al., 2009). Dersom helningsvinkelen til dipol kilden endrer seg 10%, gir dette en feil i signalet på 15-20%, som er lik eller større enn effektene til 4D-anomaliene. Kildens orientering, plassering og høyde påvirker signalet og kan føre til feil i målingene.

Endringer i havkonduktivitet kan gi ulik demping av luftbølgen i 4D-sammenheng. Slike problemer er størst i grunne hav, fordi temperaturendringene (som påvirker konduktiviteten) er hyppigst i de øverste delene av havet. En endring på 4,5% kan gi en 10% endring i amplitude



Figur 1.2: En HED-kilde sender ut et 3 dimensjonalt felt, hvor geometrien defineres ved hjelp av kilde-mottaker asimut (Eidesmo et al., 2002).

og noen få graders faseendring (Orange et al., 2009).

Motivasjon og formål

Inversjon av CSEM-data kan være vanskelig og tidkrevende. Ved bruk av lineære approksimasjoner av integralligningen for det elektromagnetiske feltet, kan inversjon av 3D CSEM utføres ved lineære metoder. Forovermodellering beregner feltet i mottakerposisjonene for en gitt modell, mens ved inversjon estimeres modellparametrene fra et gitt datasett. Denne masteroppgaven undersøker en statisk lokalisert ikke-lineær (SLN) tilnærming (Habashy et al., 1993) av det elektriske feltet. SLN er for små volum og lave frekvenser stabil over flere størrelsesordener av kontraster (Habashy et al., 1993), og er like enkel å implementere som den velkjente og benyttede Born-metoden (Zhigang et al., 2008). Dette gir motivasjon til å undersøke:

1. Gyldigheten til Born og SLN sammenlignet med full integralløsning (FI) av det elektromagnetiske feltet ved forovermodellering for et hydrokarbonfylt reservoar i produksjon.
2. Syntetiske eksperimenter ved inversjon av 3D og 4D CSEM-data med SLN og Born, for samme reservoarmodell benyttet til forovermodellering.

Formålet i punkt 1 er å undersøke muligheten for å bruke SLN til forovermodellering av elektromagnetiske felt for de kontrastene og volumene som eksisterer i 3D og 4D-sammenheng. Formålet med de syntetiske inversjonseksperimentene i punkt 2, er å undersøke stabiliteten til det inverse problemet ved å legge til ulike mengder datastøy og introdusere modellfeil. De

syntetiske eksperimentene viser også hvordan ulike parametre vil påvirke inversjonsresultatet, og gi en indikasjon på hvor gode inversjonsresultater som kan forventes i inversjon av reelle data.

Oppbygning

Hvordan bølgene beveger seg i et materiale, avhenger av mediets ledende egenskaper. Kapittel 2 tar for seg teorien bak materialers elektriske ledningsevner og empiriske forhold mellom vannmetning, konduktivitet og porøsitet. Videre beskrives bevegelsen av elektromagnetiske bølger ved hjelp av Maxwells likninger. Born- og SLN-tilnærmingen blir også introdusert i dette kapitlet, med en diskusjon om metodenes egenskaper.

I inversjon er det viktig å forstå det inverse problemet godt for å finne en god løsningsmetode. Et inversjonsproblem kan være godt eller dårlig stilt. Små mengder datastøy i dårlig stilte problemer kan “blåses opp” og gi et dårlig estimat av den sanne modellen. Ved regularisering stabiliseres inversjonen, men på bekostning av lavere oppløsning. Kapittel 3 tar for seg invers teori og parameterestimering, og introduserer metodene benyttet til inversjon av CSEM-data senere i oppgaven.

Forovermodellering av 3D og 4D CSEM-data gjøres i kapittel 4. Undergrunnen i forsøkene består av en heterogen bakgrunnsmodell og et hydrokarbonfylt reservoar, med metningsverdier generert i en reservoarsimulator. Både Born- og SLN-approksimasjonen sammenliknes med FI-løsningen, og bruken av 4D CSEM testes ut ved numeriske eksempel. Dataene modelleres ved bruk av MATLAB programmet INTE3D (Hursan et al., 2006). For det samme reservoaret, undersøkes metodene ved ulike konduktivitetskontraster mellom reservoaret og bakgrunnsmodellen. Formålet med eksperimentet er å undersøke hvordan SLN og Born vil respondere når forskjellen mellom reservoaret og bakgrunnsmodellen varierer over flere størrelsesorden.

Lineær inversjon av 3D og 4D CSEM-data gjøres i kapittel 5 for Born- og SLN-approksimasjonen. I dette kapitlet er data modellert med en homogen bakgrunnsmodell, men med samme reservoarmodell som i kapittel 4. En fordel med å invertere 4D-differansedata, feltendringen mellom to tidspunkt, er kansellering av eventuelle feil i det tidsuavhengige bakgrunnsfeltet. Etter lineær inversjon for å bestemme de ledende egenskapene til reservoaret, benyttes empiriske formler for estimering av olje og vannmetninger.

En diskusjon og oppsummering av resultatene fra forovermodellering og inversjon blir presentert i kapittel 6, med en påfølgende konklusjon.

Kapittel 2

Elektromagnetisme

EM-metoder benytter responsen av bevegelsen til elektromagnetiske bølger gjennom jorden. Dette kapittelet gir en introduksjon i elektrisk ledningsevne og bevegelsen av elektromagnetiske bølger, beskrevet av Maxwells ligninger. I slutten av kapittelet introduseres to tilnærminger til integralligningen for det elektromagnetiske feltet, Born- (Born, 1933) og SLN-approksimasjonen (Habashy et al., 1993). Teorien er hovedsakelig basert på Gueguen og Palciauskas (1994) og Chew (1995).

2.1 Elektrisk ledningsevne

Elektrisk konduktivitet σ er et mål av materialets evne til å lede elektrisk strøm, og måles i enheten Siemens per meter (S/m). Elektrisk resistivitet ρ er den inverse verdien av σ , og har enheten Ohm meter (Ωm). Når et elektrisk felt $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ (Volt/m) virker på en gjenstand, vil de ladde partiklene i gjenstanden settes i bevegelse og generere en elektrisk strømtetthet $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, y, z)$ (ampere/m²). Det finnes et lineært forhold mellom disse størrelsene, gitt ved Ohms lov. For et homogent, isotropt materiale, er (Gueguen og Palciauskas, 1994)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

For et anisotropt materiale avhenger de indre egenskapene av retningen til feltet, og Ohms lov er

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\rho}^{-1} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.2)$$

Her er $\boldsymbol{\sigma}$ og $\boldsymbol{\rho}$ 2-ordens tensorer.

Formlene over er gitt på vektorform, men de indre ledende egenskapene til et materiale beskrives på skalar form. Konduktiviteten til et materiale avhenger av ladningstettheten n , styrken

til ladningene q og mobiliteten μ (Gueguen og Palciauskas, 1994),

$$\sigma = nq\mu. \quad (2.3)$$

Mobilitet er en funksjon av det elektriske feltet som virker på ladningene og deres hastighet $\mathbf{v} = \mu\mathbf{E}$. På bakgrunn av konduktivitet deles materialer inn i ulike kategorier. De tre viktigste er ledende ($10^5 < \sigma < 10^8$ S/m), halv-ledende ($10^{-7} < \sigma < 10^5$ S/m) og ikke-ledende ($\sigma < 10^{-7}$ S/m) materialer.

Elektriske strømmer dannes enten ved elektronisk eller ionisk konduksjon. Ved elektronisk konduksjon, som er viktig for ledende materialer, beveger elektroner seg fritt mellom atomene. For dielektriske eller ikke-ledende materialer, som sandstein og skifer i de forholdene som finnes på jorden, er ioner i formasjonsvannet de viktigste ladningsbærerene. Mobiliteten er mye lavere for ioner enn elektroner og det finnes mye færre ioner sammenlignet med elektroner i et materiale, det er derfor stor forskjell mellom ledende og ikke-ledende materialer.

Konduktiviteten til en ren sandstein kan varierer fra $10^{-10} - 10^{-14}$ S/m, mens halvledere som saltvann har konduktivitetsverdier mellom $10^0 - 10^2$ S/m. En liten mengde saltvann i porerommet til sandsteinen vil dermed øke konduktiviteten til bergarten betraktelig. Dersom vannet strømmer lett gjennom porerommet, vil den effektive konduktiviteten i bergarten være tilsvarende høy. Formasjonsvann består av ulike saltioner i oppløsning, med konduktivitet gitt ved (Gueguen og Palciauskas, 1994)

$$\sigma_w = \frac{nq^2}{6\pi\eta r}. \quad (2.4)$$

Her er r er ioneradius og η viskositeten til vannet. Viskositeten avhenger av styrken til hydrogenbindingene mellom vannmolekylene, som igjen varierer med temperaturen i vannet. Ved lave temperaturer er hydrogenbindingene sterkere enn ved høye temperaturer og σ_w vil øke med stigende temperatur. Dette gjelder kun opp til et kritisk punkt. Temperaturvinduet med denne trenden ligger mellom 400-800 °C, her øker viskositeten i takt med temperaturen.

Trykket i jordskorpen øker med økende dyp. Ved høyere trykk vil atomer presses sammen og rommet mellom orbitalene der elektroner beveger seg vil minske. Det blir lettere for elektroner å gå fra ett energinivå til det neste, elektronkonduktiviteten øker. Mange reservoar blir også presset sammen under produksjon på grunn av endringer i trykk i reservoaret (Ekofisk, Sulak (1991)). Dette endrer de elastiske parametrene til rammeverket, og kan bl.a. føre til lavere permeabilitet og porøsitet i reservoarbergarten. Den effektive konduktiviteten til reservoaret kan da endres ettersom reservoarvæskene vil strømme dårligere, ionemobiliteten avtar. Videre i denne oppgaven antas disse faktorene å være ubetydelige.

2.1.1 Archies lover

Archies første lov

Når et elektrisk felt virker på en bergart, dannes en elektrisk strøm primært på grunn av saltionene som settes i bevegelse. Forholdet mellom konduktiviteten til formasjonsvæsken σ_w og den effektive konduktiviteten til en fullstendig mettet bergart σ , kalles formasjonsfaktor (Gueguen og Palciauskas, 1994),

$$F = \frac{\sigma_w}{\sigma} = \frac{\rho}{\rho_w}. \quad (2.5)$$

Archies første lov er et empirisk forhold som knytter sammen porøsiteten ϕ og formasjonsfaktoren F for en vannmettet, ren reservoarbergart (Gueguen og Palciauskas, 1994),

$$F = \phi^{-m} \quad \text{eller} \quad F = (\phi - \phi_0)^{-m}. \quad (2.6)$$

Eksponenten m er tilnærmet konstant for en gitt bergart og er vanligvis mellom $1.5 \leq m \leq 2.5$, med $m \approx 2$ for de fleste sandsteiner. Lovene over kan brukes for sedimentære bergarter med porøsitet mellom $0.05 < \phi < 0.40$. For bergarter med porøsitet lavere enn den kritiske ϕ_0 , finnes det ingen konduktive gangveier. I et slikt tilfelle klarer ingen ioner bevege seg og $\sigma = 0$.

Archis andre lov

Resistivitetsindeksen (RI) definert som forholdet mellom den sanne resistiviteten til bergart ρ_t (delvis mettet) og resistiviteten til bergarten ved fullstendig vannmetting ρ_0 ,

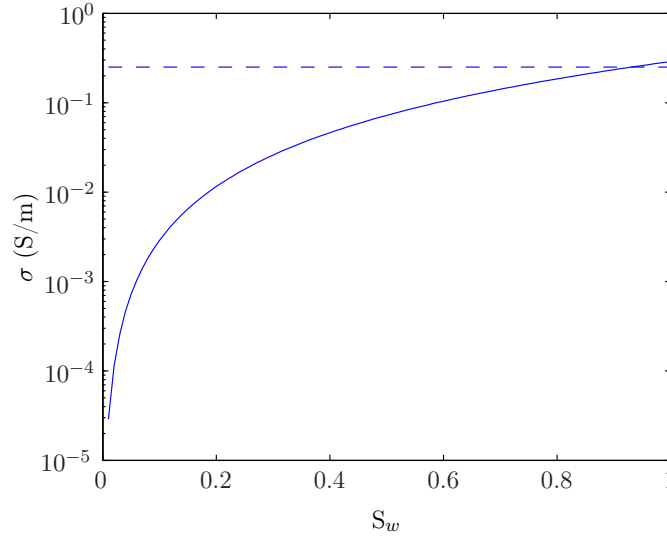
$$\text{RI} = \frac{\rho_t}{\rho_0} \quad (2.7)$$

(Gueguen og Palciauskas, 1994). RI er dimensjonsløs og benyttes for å forutsi vannmetningen S_w til en bergart gjennom Archies andre lov,

$$\text{RI} = (S_w)^{-n}. \quad (2.8)$$

MettningssekspONENTEN n er tilnærmet konstant for et gitt porøst medium og en gitt formasjonsvæske. Den er forskjellig for gass-vannmetninger og olje-vannmetninger, der et forsøk presentert i Gueguen og Palciauskas (1994) har gitt høyere n for oljemettede (≈ 2.08) enn for gassmettede (≈ 1.62) bergarter.

Dersom en ikke-ledende væske forskyver formasjonsvannet homogent, vil den gjenværende volumdelen vann være ϕS_w . Under disse antagelsene er motstanden til bergarten ifølge Archies



Figur 2.1: Her er konduktiviteten til et reservoar med $\phi = 17\%$ plottet som funksjon av vannmetning når $\sigma_w = 10$ S/m. Den stiplede linjen viser en realistisk bakgrunnskonduktivitet, $\sigma^{(0)} = 0.25$ S/m.

lov $\rho_t = (\phi S_w)^{-m} \rho_w$, og

$$RI = \frac{\rho_t}{\rho_0} = \frac{(\phi S_w)^{-m} \rho_w}{\phi^{-m} \rho_w} = (S_w)^{-m}. \quad (2.9)$$

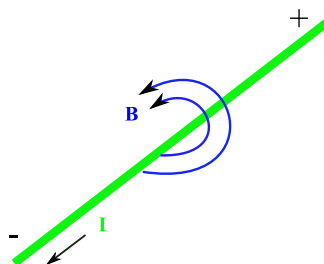
I realiteten vil ikke vann eller olje forskyves homogent, m vil være ulik fra n . Fra Archies lover kan konduktiviteten til en bergart beregnes ved

$$\sigma_t = \phi^m S_w^n \sigma_w. \quad (2.10)$$

Figur 2.1 viser konduktivitetsendringer i en bergart som funksjon av vannmetning med konstant porøsitet. Parametrene benyttet er $m = n = 2$, $\phi = 17\%$ og $\sigma_w = 10$ S/m. Tangenten til kurven er brattest for lav vannmetning ($S_w < 20\%$), mens den avtar noe for høyere vannmetninger. Dette tyder på en rask endring i effektiv konduktivitet i begynnelsen av produksjonsfasen (vanninjeksjon) til et reservoar, mens mot slutten av produksjonsfasen vil konduktivitetsendringene avta. Den stiplede linjen viser en realistisk konduktivitet til en vertbergart, $\sigma^{(0)} = 0.25$ S/m. Konduktiviteten i reservoaret krysser bakgrunnskonduktiviteten ved 90% vannmetning.

2.2 Maxwells ligninger

Maxwells ligninger ble etablert av James Clerk Maxwell i 1873 og beskriver bevegelsen av elektromagnetiske felt. Hans arbeid bygger på de ufullstendige ligningene som var resultater fra Faraday, Ampere, Gauss og Poissons arbeid (Chew, 1995). Maxwell la til leddet som beskriver



Figur 2.2: En elektrisk strøm \mathbf{I} danner et magnetfelt \mathbf{B} (Cutnell og Johnson, 2007).

forskyvningsstrømmer i de eksisterende ligningene. Forskyvningsstrømmer eksisterer kun i tilfeller der feltet endres med tiden. Maxwells arbeid var viktig for å bevise at elektromagnetiske felt også eksisterer som bølger.

2.2.1 Generalisering av Amperes lov

Elektriske ladninger i bevegelse genererer en elektrisk strøm $\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)$ målt i ampere (A), hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ er romkoordinater og t er tid i sekund. Den elektriske strømmen vil induserer et magnetfelt, eller magnetisk flukstetthet $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ med enhet Tesla, rundt ladningsstrømmen (se figur 2.2). Matematisk beskrives forholdet mellom magnetfeltet og elektrisk strømtetthet $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ ved Amperes lov,

$$\int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.11)$$

hvor $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ i ampere/m er magnetfeltet som dannes rundt ledningen. Maxwell utvidet forholdet i ligning (2.11) til å inkludere induksjon av et magnetfelt ved en tidsvarierende forskyvningsstrøm,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{J}_T(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \quad (2.12)$$

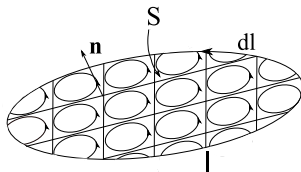
hvor $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ er dielektrisk forskyvning og med enhet coulombs/m². For å skrive om fra linjeintegral til flateintegral introduseres Stokes teorem (Chew, 1995),

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.13)$$

Linjen l i ligning (2.13) danner omrisset av flaten S , som illustrert i figur 2.3.

Ved bruk av ligning (2.12) og (2.13), kan (2.11) skrives

$$\int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.14)$$



Figur 2.3: Parametrene i Stokes teorem (Chew, 1995).

For en vilkårlig flate S , blir Maxwells første ligning i tidsdomenet,

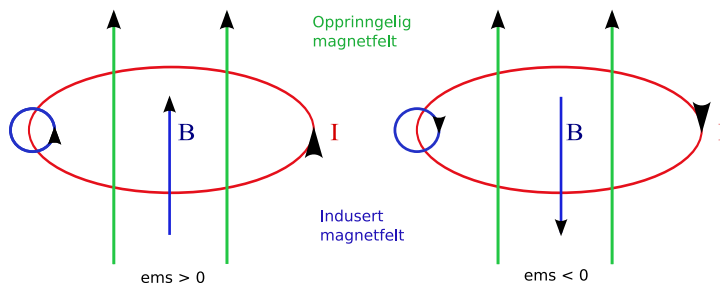
$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t). \quad (2.15)$$

Ved fouriertransformasjon av ligning (2.15) med hensyn til tid (Folland, 1992), blir Maxwells første ligning i frekvensdomenet

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) + i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}), \quad (2.16)$$

hvor ω er frekvens i radianer/sekund. Her er $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ og $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega)$ funksjoner av vinkel-frekvens, men for konstant frekvens skrives uttrykket som gitt i ligning (2.16).

2.2.2 Generalisering av Faradays lov

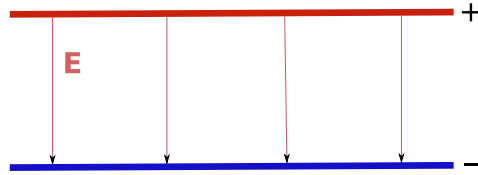


Figur 2.4: Induksjonsstrømmen I i rødt danner magnetfeltet i blått. Den venstre figuren viser positiv induksjonsspenning (**ems**) og figuren til høyre viser negativ **ems** (Callin et al., 1998).

Faradays lov uttrykker hvordan en endring i et magnetfelt vil indusere en elektrisk strøm, som illustrert i figur 2.4. Den induserte spenningen (**ems**) er positiv når den induserte strømmen $\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)$ frembringer et magnetfelt $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ som inne i sløyfen har samme retning som det opprinnelige feltet. Uttrykt ved elektrisk felt, er

$$\oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.17)$$

Det negative fortegnet skyldes at den induserte spenningen motvirker sin årsak. Ved bruk av



Figur 2.5: Figuren viser et elektrisk felt \mathbf{E} som virker mellom to plater. Feltretningen peker fra den positive til den negative platen (Callin et al., 1998).

Stokes teorem i ligning (2.17), er

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.18)$$

Ligningen viser sammenhengen mellom et elektrisk felt og en tidsvarierende magnetisk fluks-tetthet. For en vilkårlig flate S er Maxwells andre ligning i tidsdomenet,

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (2.19)$$

Ved fouriertransformasjon av ligning (2.19), er Maxwells andre ligning i frekvensdomenet

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (2.20)$$

2.2.3 Gauss lov for det elektriske feltet

Et elektrisk felt kan betraktes som en fluks av elektriske stråler som peker fra positiv til negativ ladning, se figur 2.5. Ifølge Gauss lov er andelen ladninger i et avgrenset område lik antall flukslinjer som passerer området. Maxwells tredje ligning viser hvordan ladninger skaper elektriske felt,

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t). \quad (2.21)$$

Divergensoperatoren $\nabla \cdot$ gir et mål av den totale fluksen som beveger seg fra et punkt, og $\rho(\mathbf{r}, t)$ er ladningstetthet målt i coulomb/m³. Ved fouriertransformasjon av ligning (2.21) er Maxwells tredje ligning i frekvensdomenet

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}). \quad (2.22)$$

2.2.4 Ingen magnetiske monopoler

Maxwells fjerde ligning forteller at divergensen til den magnetiske flukstettheten alltid er null, fordi det aldri er funnet en kilde eller mottaker til magnetiske felt (såkalte magnetiske ladninger) (Chew, 1995),

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.23)$$

Ved fouriertransformasjon av ligning (2.23) er Maxwells fjerde ligning i frekvens domenet

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.24)$$

2.2.5 Materiallover

Materiallovene beskriver hvordan den elektriske og magnetiske flukstettheten er relatert til det elektriske og magnetiske feltet. For et homogent, isotropt materiale, avhenger henholdsvis \mathbf{D} og \mathbf{B} av \mathbf{E} og \mathbf{H} gjennom

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.25)$$

(Chew, 1995). ε (Farads/meter) er elektrisk permittivitet, og μ (Henry/meter) magnetisk permeabilitet. I vakuum er $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ Farads/meter og $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Henry/meter. Den magnetiske permeabiliteten i jorden antas å være lik permeabiliteten i vakuum slik at $\mu = \mu_0$. Lysets hastighet er gitt ved nettopp disse to konstantene, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. I anisotrope, heterogene materialer, erstattes skalarene ε og μ med andre ordens tensorer, slik at

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}, \quad (2.26)$$

(Chew, 1995).

2.3 Bølgeligning for EM-bølger

Ut i fra Maxwells ligninger kan bevegelsesligningen for elektromagnetiske bølger utledes. Kort oppsummert er Maxwells ligninger i frekvensdomenet

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) + i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}), \quad (2.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}), \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.30)$$

Ved å ta rotasjonen av (2.28), benytte Ohms lov (2.1) og materiallovene i (2.25), og erstatte $\nabla \times \mathbf{H}$ med uttrykket i (2.27) (Chew, 1995), er

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -i\omega \mu_0 (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) \\ &= -i\omega \mu_0 (\mathbf{J}(\mathbf{r}) + i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r})) \\ &= -i\omega \mu_0 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ligning (2.31) er en vektorbølgeligning for elektromagnetiske bølger. For å få Laplacian av det elektriske feltet, benyttes vektoridentiteten

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (2.32)$$

For et homogent, isotropisk materiale uten frie ladninger er

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \right) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \rho(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.33)$$

Satt inn i ligning (2.31), blir

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.34)$$

Ligning (2.34) er en vektor Helmholtz ligning for elektromagnetiske bølger i frekvensdomenet. Det komplekse bølgetallet beskriver bevegelsen til en plan, harmonisk, elektromagnetisk bølge

$$k^2 = \mu_0 \omega^2 \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \right). \quad (2.35)$$

For en EM-bølge som beveger seg langs x -aksen, vil det elektriske feltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ for TM-modus være polarisert i z -retningen og det magnetiske feltet $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ i y -retningen. En plan bølgeløsning til Helmholtz ligning kan skrives (Gueguen og Palciauskas, 1994),

$$E_z = E_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (2.36)$$

Det korresponderende magnetiske feltet kan finnes ved å bruke ligning (2.28), sammen med materiallovene, på det elektriske feltet i ligning (2.36).

Forholdet mellom bølgetall, vinkelfrekvens og materialeegenskaper gir viktig informasjon om den elektromagnetisk bølgebevegelse i et medium. Bølgetallet kan deles inn i en real- og en imaginær del,

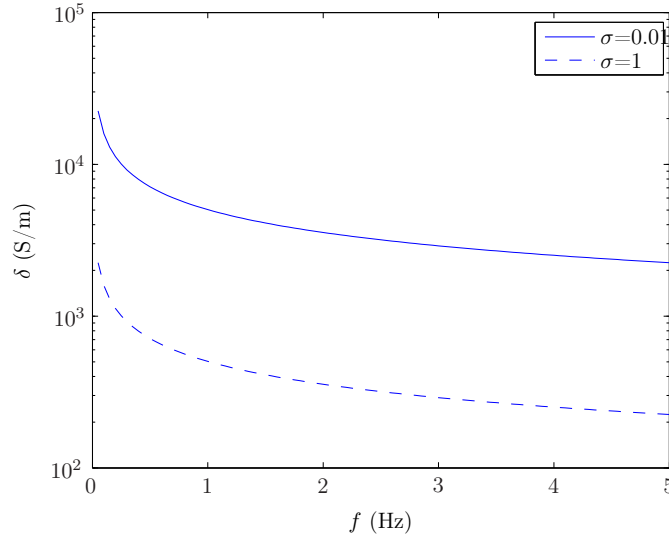
$$k \equiv \alpha - i\beta \quad \rightarrow \quad E_z = E_0 e^{-\beta x} e^{i(\omega t - \alpha x)}. \quad (2.37)$$

Den reelle delen α beskriver bevegelsen av det elektriske feltet og svingningene ved $e^{i(\omega t - \alpha x)}$. Den imaginære delen β beskriver hvordan amplituden til feltet avtar med avstand, $E_0 e^{-\beta x}$. Dempingen av amplituden er frekvensavhengig, og skjer som et resultat av konversjon av elektromagnetisk energi til varme.

Ved høye frekvenser ($\sigma \ll \omega \varepsilon$) vil det dielektriske leddet ($\varepsilon \mu_0 \omega^2$) bli veldig stort og være dominerende. For dette tilfellet er bølgetallet tilnærmet

$$k \approx \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0}. \quad (2.38)$$

I mange problemer varierer det elektromagnetiske feltet sakte med tiden, feltet har lave frekvenser ($\sigma \gg \omega \varepsilon$). I slike tilfeller neglisjeres de andre deriverte i bølgeligningen med hensyn på



Figur 2.6: Figur viser inntrengningsdypet δ ved $\sigma = 0.01$ S/m og $\sigma = 1$ S/m som funksjon av frekvens. Legg merke til den logaritmiske skalaen på y-aksen.

tid, $\mu_0 \varepsilon \omega^2$ går mot null. For frekvenser lavere enn 10^5 Hz benyttes impulsive feltkilder istedenfor oscillerende kilder. I disse tilfellene er bølgetallet gitt ved den kvasi-statiske tilnærmingen (Zhdanov, 2002)

$$k \approx \sqrt{i\omega\mu_0\sigma} = (1+i) \left(\frac{\omega\mu_0\sigma}{2} \right)^{1/2}. \quad (2.39)$$

Ved lave frekvenser er

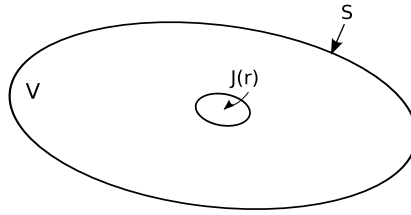
$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}. \quad (2.40)$$

Gitt at $\alpha = 2\pi/\lambda$, hvor λ er bølgelengden, vil amplituden avta med en faktor $e^{-2\pi}$, eller 37%, over en avstand lik en bølgelengde. Inntrengningsdypet er definert

$$\delta = \beta^{-1} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \approx 503 \frac{1}{\sqrt{f\sigma}}, \quad (2.41)$$

hvor f er frekvens i Hz. Figur (2.6) viser hvordan inntrengningsdypet øker med avtagende frekvens for gitt konduktivitet, $\sigma = 0.01$ S/m og $\sigma = 1$ S/m. Disse konduktivitetsverdiene er vanlige i hhv. hydrokarbonmettet og vannmettet sandstein.

I forbindelse med havbunnslogging vil dempingen av EM-feltet for bestemt geometri kun avhenge av frekvens, konduktivitet og kilde-mottaker avstand. Direktebølgen (kilde-mottaker) dempes fort på grunn av høy konduktivitet i havvannet, og vil derfor kun dominere for små offset. Luft-bølgen (nedgående felt) avhenger av havdyp, konduktivitet, frekvens og offset. For et resistivt HC-reservoar i undergrunnen, vil det oppgående feltet dominere over primærfelteter når kilde-mottaker offset er omtrent to ganger, eller større, enn dypet til reservoaret under havbunnen (Bhuyian, 2009).

Figur 2.7: Strålingen til en kilde $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ i volumet V (Chew, 1995).

2.3.1 Integralligning

Indusert elektromagnetisk respons i et anomalt volum i jorden, kan beregnes ved hjelp av en integralligning. Volumet kan betraktes som en spredningskilde i et “half-space”, det er derfor ikke nødvendig å løse for spredningsstrømmer i hele undergrunnen, men kun inne i volumet. Det elektriske og magnetiske feltet i ethvert punkt utenfor volumet beregnes ved å integrere over passende dyadiske Greens-funksjon (Hohmann, 1975).

For en kilde \mathbf{J}^a i volumet V (se figur 2.7), kan Maxwells første ligning (2.27) for et isotropt materiale skrives

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}^a(\mathbf{r}) + i\omega\mathbf{D}(\mathbf{r}) \\ &= [\sigma(\mathbf{r}) + i\omega\varepsilon(\mathbf{r})]\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}^a(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (2.42)$$

Ved rotasjonen av (2.28) er vektorbølgeligning til det elektriske feltet i dette tilfellet

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mu_0\omega^2\left[\varepsilon(\mathbf{r}) - i\frac{\sigma(\mathbf{r})}{\omega}\right]\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu_0\mathbf{J}^a(\mathbf{r}).\quad (2.43)$$

Videre kan ligning (2.43) skrives (Folland, 1992)

$$L[\mathbf{E}(\mathbf{r})] = -i\omega\mu_0\mathbf{J}^a(\mathbf{r}),\quad (2.44)$$

hvor $L = \nabla \times \nabla - \mu_0\omega^2[\varepsilon(\mathbf{r}) - i\sigma(\mathbf{r})/\omega]$ er en operator som virker på feltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. For å finne løsningen til (2.43) søker vi en Greens-funksjon i samme V , som tilfredsstiller

$$L_{\mathbf{r}}[\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = -\mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').\quad (2.45)$$

$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ er en Dirac delta funksjon, \mathbf{I} er identitetsmatrisen og L virker på $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ med hensyn på \mathbf{r} . En løsning for bølgefeltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i ligning (2.43) er

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}^a(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.\quad (2.46)$$

For å vise at dette stemmer lar vi operatoren L virke på begge sider av ligning (2.46), uttrykket går tilbake til den opprinnelige bølgeligningen,

$$\begin{aligned} L[\mathbf{E}(\mathbf{r})] &= i\omega\mu_0 \int_V L_{\mathbf{r}}[\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{J}^a(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= i\omega\mu_0 \int_V -\mathbf{I}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}^a(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= -i\omega\mu_0 \mathbf{J}^a(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Dette uttrykker at en kilde i punktet \mathbf{r}' gir et bidrag i \mathbf{r} , hvor $\mathbf{J}^a(\mathbf{r}')$ er en punktkilde i \mathbf{r}' . Det er nødvendig å legge til betingelser på \mathbf{J}^a og \mathbf{r}' -avhengigheten til \mathbf{G} , slik at integralet i ligning (2.46) er vel-definert og for at utbytting av integrering og derivering i ligning (2.47) skal være gjeldende (Folland, 1992).

Konduktivitetskontrasten mellom et hydrokarbonfylt reservoar og bakgrunnsmodellen, er

$$\Delta\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) - \sigma^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (2.48)$$

hvor $\sigma(\mathbf{r})$ og $\sigma^{(0)}(\mathbf{r})$ er hhv. konduktiviteten i reservoaret og bakgrunnsmodellen. Fra Ohms lov er $\mathbf{J}^a(\mathbf{r}) = \Delta\sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$, og det anomale elektriske feltet er gitt ved Lippmann-Schwinger ligningen,

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \Delta\sigma(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V. \quad (2.49)$$

Ligning (2.49) er en singulær, inhomogen, vektor Fredholm integralligning av andre orden. Etter beregninger av det elektriske feltet i det anomale volumet V , kan feltet i alle mottakerposisjoner beregnes,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) + i\omega\mu_0 \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \Delta\sigma(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2.50)$$

hvor $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ er den elektriske Greens-funksjonen for et lagdelt, ledende materiale med bakgrunnskonduktivitet $\sigma^{(0)}$. Bakgrunnsfeltet $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$ kan enkelt beregnes for en kjent kilde $\mathbf{J}^{(0)}(\mathbf{r})$.

Greens-funksjonen kan finnes ved å løse ligning (2.45), og er for en homogen bakgrunnsmodell (Chew, 1995)

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[\mathbf{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right] g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2.51)$$

hvor bølgetallet k er gitt ved (2.39) for lave frekvenser. Den skalare Greens-funksjonen $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ tilfredsstiller

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.52)$$

og er gitt ved

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.53)$$

2.4 Born-approksimasjonen

Born-approksimasjonen (Born, 1933) er en tilnærming av integralligningen for det anomale feltet $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r})$, hvor totalfeltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i integralet (2.50) erstattes med bakgrunnsfeltet,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (2.54)$$

Ved å definere $Q(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0\Delta\sigma(\mathbf{r})$, er en forenklet løsning av totalfeltet ved Born-approksimasjonen

$$\mathbf{E}_B(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) + \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot Q(\mathbf{r}') \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2.55)$$

Born-approksimasjonen gir en representasjon av $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ som er lineær i $\Delta\sigma(\mathbf{r})$, og er den første løsningen av det elektriske feltet ved suksessiv iterasjon. Den fulle rekken kalles Born-rekken. Vanligvis er slike rekker divergente eller veldig sakte konvergerende for store kontraster. Løsningen av det anomale elektriske feltet $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r})$ kan separeres i to komponenter; et induktivt (fra vektorpotensialet) og et galvanisk (fra skalarpotensialet) (Habashy et al., 1993),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_B(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) &+ \left[\int_V g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right. \\ &+ \left. \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \int_V g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right], \end{aligned} \quad (2.56)$$

hvor k er bølgetallet fra bakgrunnsmodellen. Basert på Habashy et al. (1993) analyseres konvergensten ved den dimensjonsløse konstanten

$$\delta = \frac{1}{|k^2|} \text{maks}(|Q(\mathbf{r})|). \quad (2.57)$$

Ved neglisjering av forskyvningsstrømmer er $k^2 = i\omega\mu_0\sigma^{(0)}$ og ligning (2.57) forenkles til

$$\delta = \frac{\sigma_{\text{maks}} - \sigma^{(0)}}{\sigma^{(0)}}. \quad (2.58)$$

I ligning (2.56) vil styrken til induksjonsleddet i det anomale feltet ved lave frekvenser bestemmes av $|k^2|D\delta$ (D er øvre grense til avstanden mellom to punkt i V), mens styrken til det galvaniske leddet bestemmes av δ . Dette betyr at induksjonsleddet kan gjøres lite ved å minske frekvensen (k) for en gitt kontrast δ , eller ved å redusere δ for en gitt frekvens. Det galvaniske leddet kan kun bli mindre ved å redusere kontrasten δ . Induksjonsleddet vil ved lav frekvens konvergere selv for store kontraster, mens det galvaniske leddet vil kun konvergere dersom kontrasten δ er liten.

For små kontraster mellom bakgrunnsmodellen og egenskapene til det anomale området, er Born-approksimasjonen en fornuftig tilnærming ved lave frekvenser. Dessverre er ofte konduktivitetskontrastene moderate til høye, som fører til ulike amplitude- og faseverdier mellom det indre elektriske feltet og bakgrunnsfeltet. Det er Born-approksimasjonens lineære egenskaper som gjør tilnærmingen populær, det åpner for muligheten til lineær inversjon av spredningsproblemet.

En grunnleggende forskjell på det induserte og det galvaniske leddet er at induksjonsleddet er nesten lineært når $|k^2|\delta D^2$ er lite, mens det galvaniske leddet alltid er ikke-lineært (om ikke δ er liten). Born-approksimasjonen forventes derfor å være best for induksjonsleddet, siden den lineariserer problemet i $\sigma^{(0)}(\mathbf{r})$. Born-rekken vil derfor ofte konvergere ved lave frekvenser om feltet i det anomale området kun består av induktive effekter.

2.5 Statisk lokalisert ikke-lineær tilnærming

Lokalisert ikke-lineær tilnærming (LN) og statisk lokalisert ikke-lineær (SLN) tilnærming ble først introdusert av Habashy et al. (1993) og (Torres-Verdin og Habashy, 1994). I ettertid har flere artikler rundt LN og SLN-tilnærmingen blitt publisert (Charalambopoulos et al., 2002; French, 2003; Song og Liu, 2004). Tilnærmingemetoden er basert på antagelser om en lav romlig gradient i det indre elektriske feltet, som neglisjeres inne i et anomalt volum.

LN bygger på integralligningen for det elektriske feltet (2.50). For observasjonspunkt ($\mathbf{r} \in V$) i et anomalt volum, må volumintegralet defineres forsiktig på grunn av singulariteten i Greens-tensoren. Feltet for et punkt inne i volumet kan skrives

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) + \left[\left(\mathbf{I} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) \int_V g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + T(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V \quad (2.59)$$

hvor,

$$T(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot Q(\mathbf{r}') [\mathbf{E}(\mathbf{r}') - \mathbf{E}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}'. \quad (2.60)$$

Singulariteten er nå integrerbar fordi $\mathbf{E}(\mathbf{r}') - \mathbf{E}(\mathbf{r})$ forsvinner når $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$, hvor $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ er singulær. Ved å sette $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ alene på venstre side, blir integralligningen for det indre elektriske feltet,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) \cdot [\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) + T(\mathbf{r})]. \quad (2.61)$$

$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$ er en 2-ordens tensor, kalt depolariseringstensor,

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) = \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) \int_V g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]^{-1}. \quad (2.62)$$

Den lokaliserte ikke-lineære (LN) approksimasjonen er gitt ved første del av (2.61)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V. \quad (2.63)$$

Approksimasjonen er ikke-lineær i $Q(\mathbf{r})$. Som argument for approksimasjonen, kan det tenkes at det største bidraget til integralet i ligning (2.59) kommer fra nærliggende punkt $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Dersom det indre feltet $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ tilnærmes verdien i $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, vil det andre leddet i (2.59) gi den fulle approksimasjonen til det anomale feltet, med en feil gitt av det tredje leddet. LN tilnærmingen antar

$$|\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})| \gg |T(\mathbf{r})|, \quad \mathbf{r} \in V, \quad (2.64)$$

og vil være svært bra dersom det indre elektriske feltet er en glatt varierende funksjon. Høyre side av ulikheten forventes å være liten fordi $\mathbf{E}(\mathbf{r}') - \mathbf{E}(\mathbf{r})$ er null når $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ er singulær.

Når $Q(\mathbf{r}) \neq 0$, har $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r})$ en likestrømsgrense $\mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{r})$ med reelle tall som er ulik fra enhetstensoren \mathbf{I} . Ved bruk av $\mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{r})$ i (2.63), kommer vi frem til SLN-approksimasjonen (Habashy et al., 1993),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V. \quad (2.65)$$

SLN-approksimasjonen redegjør for forskjellen i amplituden til det totale indre feltet fra bakgrunnsfeltet som skyldes oppsamling av ladninger langs kantene til sprederen. Det totale feltet i et punkt \mathbf{r} utenfor V er ved SLN tilnærmet lik

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) + \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot Q(\mathbf{r}') \mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2.66)$$

Ved forovermodellering benyttes $t = \Delta\sigma\mathbf{\Gamma}_0$ som modellparameter i hver gridcelle, fordi SLN-approksimasjonen er lineær i t . Det anomale elektriske feltet er ved SLN-approksimasjonen

$$\Delta\mathbf{E}_S(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2.67)$$

SNL approksimasjonen avhenger av geometrien til det anomale volumet. For et konduktivitetsfærisk anomalt volum med konduktivitet σ , i et bakgrunnsmedium med konduktivitet $\sigma^{(0)}$, er $\mathbf{\Gamma}_0$ gitt ved (Habashy et al., 1993),

$$\mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\Delta\sigma}{\sigma^{(0)}}\right)^{-1} \mathbf{I} = \left(\frac{3\sigma^{(0)}}{\sigma + 2\sigma^{(0)}}\right) \mathbf{I} \quad (2.68)$$

og

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \Delta\sigma\mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{3\Delta\sigma\sigma^{(0)}}{\Delta\sigma + 3\sigma^{(0)}}\right) \mathbf{I}. \quad (2.69)$$

Charalambopoulos et al. (2002) introduserer SLN-approksimasjonen for ellipsoidisk geometri og viser hvordan $\mathbf{\Gamma}_0$ kan utledes for andre geometriske former. Ligningen (2.67) kan benyttes

til å finne reservoaregenskaper i \mathbf{t} ved inversjon av det elektromagnetiske feltet. Videre kan den anomale konduktiviteten enkelt beregnes dersom man kjenner konduktiviteten til bakgrunnsmodellen. LN approksimasjonen er gitt ved bakgrunnsfeltet modifisert med en summeringsfaktor og en multiplikasjonsfaktor. Summeringsfaktoren korrigerer hovedsakelig for fase, mens multiplikasjonsfaktoren korrigerer primært for amplitude. I SLN-approksimasjonen er adderingsleddet lik null, tilnærmingen er kun en multiplikasjonsfaktor av bakgrunnsfeltet og korrigerer primært for amplitude og i en liten grad for fasen. Ligning (2.65) inneholder ingen kryss-polariserings ledd (Habashy et al., 1993).

Numeriske forsøk presentert i Habashy et al. (1993) viser at det magnetiske feltet beregnet ved SLN gir et godt estimat til den sanne løsningen over 5 størrelsesorden av konduktivtetskontraster ($\sigma/\sigma^{(0)}$), når $f = 100$ Hz, $\sigma^{(0)} = 0.1$ S/m og det anomale volumet er en kule med radius $R = 1$ m. Ved større kuleradius $R = 30$ m og høy konduktivitet σ , underestimerer tilnærmingen magnituden kraftig. Figur 5 i Habashy et al. (1993) viser hvordan feilen

$$\varepsilon_{\mathbf{d}} = \frac{\|\mathbf{d}_{\text{sann}} - \mathbf{d}_{\text{est}}\|_2}{\|\mathbf{d}_{\text{sann}}\|_2}, \quad (2.70)$$

i det estimerte feltet sammenlignet med FI stiger for økende kuleradius, hvor $\mathbf{d} = \mathbf{H}$. Når $R = 58$ m er feilen i amplitude til det magnetiske feltet 20%. SLN-approksimasjonen er bedre enn Born til amplitude beregninger for store kontraster, volum og høye frekvenser, men metodene gir like dårlige faseberegninger. Bruken av SLN for flere spredevolum og vekselvirkningen mellom dem, må undersøkes i forovermodellering. Dette gir motivasjon til å teste ut SLN og sammenligne med Born og FI-løsningen for det elektromagnetiske feltet videre i oppgaven.

2.6 Diskretisering

I praksis utføres forovermodellering og inversjon ved hjelp av diskrete datapunkt og modellparametre. Det elektriske feltet har 3 komponenter, $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, som kan uttrykkes på vektornotasjon ved E_i , hvor $i = x, y, z = 1, 2, 3$. Ved å inkludere $i\omega\mu_0$ i ligning (2.49) i Greens-funksjonen, kan integralligningen for det anomale feltet i skrives

$$\Delta E_i(\mathbf{x}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \Delta \sigma_{jk}(\mathbf{x}_1) E_k(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1, \quad (2.71)$$

hvor $j, k = 1, 2, 3$. For et isotropt materiale er $\Delta\sigma_{jk}(\mathbf{x}_1) = \delta_{jk}\Delta\sigma(\mathbf{x}_1)$. Ligning (2.71) kan da skrives

$$\Delta E_i(\mathbf{x}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) E_j(\mathbf{x}_1) \Delta\sigma(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \quad (2.72)$$

$$= \int_V G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) E_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Delta\sigma(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \quad (2.73)$$

Her benyttes egenskapen $\int E_j(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 = \int E_j(\mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \int E_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2$. Ved diskretisering kan integralet løses ved summasjon over alle gridcellene,

$$\Delta E_i^p = G_{ij}^{pq} E_j^{qr} \Delta\sigma^r \Delta V, \quad (2.74)$$

hvor Einsteins summasjonsnotasjon er tatt i bruk for summering over j, q og r , og ΔV er volumet til hver gridcelle. Indeksene $p = 1, \dots, M$ og $q, r = 1, \dots, N$, hvor M er antall mottakere og N antall modellparametere eller gridceller. Det elektriske feltet i ligning (2.74) kan uttrykkes ved en indeks, ved å la $i, p \rightarrow I$ når

$$I = (i - 1)M + p. \quad (2.75)$$

På samme måte kan indeksene $j, q \rightarrow J$,

$$J = (j - 1)N + q. \quad (2.76)$$

Når disse uttrykkene er gitt, kan Greens-funksjonen representeres ved hjelp av to indekser ved bruk av de samme transformasjonsformlene (2.75) og (2.76), slik at $G_{ij}^{pq} \rightarrow G_{IJ}$. På denne notasjonene er den diskrete analogen til ligning (2.71), ved å inkludere volumet ΔV i G_{IJ} ,

$$\Delta E_I = G_{IJ} E_J^r \Delta\sigma^r. \quad (2.77)$$

Her er matrisen G_{IJ} er en diskrete analog til den korresponderende Greens-funksjonen, som virker fra gridcellene i reservoaret til mottakerene på havbunnen. G_{IJ} består av $3M \times 3N$ elementer (Zhdanov, 2002),

$$G_{IJ} = \begin{bmatrix} G_{xx}^{11} & \dots & G_{xx}^{1N} & G_{xy}^{11} & \dots & G_{xy}^{1N} & G_{xz}^{11} & \dots & G_{xz}^{1N} \\ & & & \vdots & & & & & \\ G_{xx}^{M1} & \dots & G_{xx}^{MN} & G_{xy}^{M1} & \dots & G_{xy}^{MN} & G_{xz}^{M1} & \dots & G_{xz}^{MN} \\ G_{yx}^{11} & \dots & G_{yx}^{1N} & G_{yy}^{11} & \dots & G_{yy}^{1N} & G_{yz}^{11} & \dots & G_{yz}^{1N} \\ & & & \vdots & & & & & \\ G_{yx}^{M1} & \dots & G_{yx}^{MN} & G_{yy}^{M1} & \dots & G_{yy}^{MN} & G_{yz}^{M1} & \dots & G_{yz}^{MN} \\ G_{zx}^{11} & \dots & G_{zx}^{1N} & G_{zy}^{11} & \dots & G_{zy}^{1N} & G_{zz}^{11} & \dots & G_{zz}^{1N} \\ & & & \vdots & & & & & \\ G_{zx}^{M1} & \dots & G_{zx}^{MN} & G_{zy}^{M1} & \dots & G_{zy}^{MN} & G_{zz}^{M1} & \dots & G_{zz}^{MN} \end{bmatrix}.$$

Matrisen E_J^r er en sparse tri-diagonal $3N \times N$ matrise med x, y og z komponentene til det elektriske feltet i midtpunktet til gridcellene i det anomale domenet (Zhdanov, 2002),

$$E_J^r = \begin{bmatrix} E_x^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & E_x^N & \\ E_y^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & E_y^N & \\ E_z^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & E_z^N & \end{bmatrix}.$$

Modellparameteren $\Delta\sigma^r$ er en $N \times 1$ vektor,

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_N]^T = [\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_N]^T, \quad (2.78)$$

Tilsvarende for SLN er

$$\mathbf{m} = [t_1, t_2, \dots, t_N]^T. \quad (2.79)$$

For Born- (2.55) og SLN-approksimasjonen (2.67) er det anomale elektriske feltet på diskrete form henholdsvis,

$$\Delta\mathbf{E}_B = \mathbf{GE}^{(0)}\Delta\boldsymbol{\sigma}, \quad (2.80)$$

$$\Delta\mathbf{E}_S = \mathbf{GE}^{(0)}\mathbf{t}. \quad (2.81)$$

Kapittel 3

Parameterestimering og inverse problem

I geofysikk samles det inn store mengder data som skal gi informasjon om undergrunnen, for eksempel seismikk, brønnlogger og EM-data. Ved inversjon av geofysiske data kan en estimere porøsitet, vannmetning, konduktivitet, etc. Dette kapittelet tar for seg en kort introduksjon i inversjon og parameterestimeringsproblemer, og gir en dypere forklaring av metodene benyttet for å løse inverse problemer senere i oppgaven. Kapittelet bygger på teori fra Hansen (1998) og Aster et al. (2005).

3.1 Innledning

Det er mange problemer knyttet til inversjon av data. I forovermodellering vil det finnes en unik løsning dersom alle modellparametrene er kjent. Ved inversjon av dataene er problemene større. For at et problem skal være godt stilt, må en løsning eksistere, den må være unik og løsningen må være stabil med hensyn til endringer i dataene. I havbunnslogging kan det elektromagnetiske feltet kalkuleres for en gitt konduktivitetsmodell, men det finnes likevel mange ulike konduktivitetsmodeller som vil gi de samme dataene. Det inverse problemet har derfor mange løsninger, og er ikke lenger unikt.

Et lineært, diskret inverst problem kan uttrykkes som

$$G(\mathbf{m}) = \mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d}. \quad (3.1)$$

Her er \mathbf{m} en $N \times 1$ vektor med modellparametrene, og datavektoren \mathbf{d} består av M diskret datapunkt. Modellrommet og datarommet kobles sammen ved hjelp av en $M \times N$ operator \mathbf{G}

med alle de fysiske lovene for det gjeldende problemet. Matrisen \mathbf{G} kalles datakernel, analogt til teorien om integralligninger. Data og modellparametrene er analogt til to kontinuerlige funksjoner $d(x)$ og $m(x)$, hvor x er en uavhengig variabel. Lineære problemer følger reglene for superposisjon og skalering,

$$\begin{aligned} G(m_1 + m_2) &= G(m_1) + G(m_2) \\ G(\alpha m) &= \alpha G(m). \end{aligned}$$

Problemet med å beregne \mathbf{d} for en gitt modell, og ved en kjent operator \mathbf{G} , kalles forovermodellering. I noen tilfeller er både dataene og modellen kjent, og målet er å finne operatoren \mathbf{G} . Dette er et systemidentifikasjonsproblem.

Dersom det er flere datapunkt enn modellparametrene $M > N$ i inversjonen, finnes det ingen eksakt løsning \mathbf{m} som passer alle dataene perfekt, og $\mathbf{Gm} = \mathbf{d}$ er inkonsistent. Slike problemer oppstår ved støy i dataene d_i eller dersom forovermodelleringen er en tilnærming av den sanne modellen. Dersom antagelsene i approksimasjonene ikke er gyldige, vil viktig informasjon utelukkes, og resultatet bli tilsvarende dårlig. En måte å løse dette problemet på er ved å finne en modell som passer de tilnærmede dataene på en “best mulig” måte (Aster et al., 2005).

Støy i dataene vil føre til feil i modellen. De registrerte dataene kan uttrykkes som

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{d}_{\text{sann}} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \mathbf{Gm}_{\text{sann}} + \boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

hvor $\boldsymbol{\varepsilon}$ er støy. Avhengig av strukturen til problemet som skal løses, kan støy enten nulles ut og løsningen vil være betydningsfull, eller støyen kan forsterkes og skape en ubetydelig løsning. Små mengder støy i dataene kan skape store problemer for inversjonen og resultatene. Når en løsning ikke er unik, har ikke det inverse problemet full rang og \mathbf{G} vil ha et ikke-trivielt nullrom. Det finnes løsninger i nullrommet til \mathbf{G} , slik at

$$\mathbf{Gm}_0 = \mathbf{0}. \tag{3.3}$$

Disse løsningene kan legges til den riktige løsningen, uten å endre på feilen i restleddene, fordi

$$G(\mathbf{m} + \mathbf{m}_0) = \mathbf{Gm} + \mathbf{Gm}_0 = \mathbf{Gm} = \mathbf{d}. \tag{3.4}$$

Ved ustabile problem, vil små endringer i dataene føre til enorme endringer i modellen. Det er mulig å stabilisere inversjonsprosedyren ved å legge til andre betingelser, en prosess kalt regularisering. På bekostning av mer stabilitet i løsningen, vil regularisering introdusere danne en forventnings-skeivhet (“bias”) i løsningen og redusere oppløsningen.

Ved diskretisering av operatormatrisen \mathbf{G} , vil \mathbf{G} bli dårligere og dårligere betinget etterhvert som antall diskretiseringspunkt øker. Kondisjonstallet til matrisen som inverteres forteller hvor stabil løsningen er, hvor høye betingelsestall forteller om små singulære verdier og ille-betingede ligningssystem. Kondisjonstallet ved diskretisering vil fremdeles være endelig (men stort), og slike problemer klassifiseres etter graden av diskretisering og de singulære verdiene som oppstår. Diskret system karakteriseres som mildt, moderat eller kraftig dårlig stilt.

3.2 Løsning av lineære inverse problem

Det finnes forskjellige metoder for å finne den beste løsningen til et lineært inverst problem. Generelt er det ønskelig å finne numeriske verdier til modellparametrene, men det er sjelden inverse problemer kan løses å gi disse eksakte verdiene. En del av den inverse teorien er å identifisere hvilke deler av løsningen som er mest verdifull, og løse problemet slik at disse egenskapene fremheves (Menke, 1989).

3.2.1 Minste kvadraters løsning

En fornuftig måte å finne den beste løsningen er å finne den modellen som gir det minste restleddet mellom de observerte dataene \mathbf{d}^{obs} og predikerte data $\mathbf{d}^{\text{pre}} = \mathbf{G}\mathbf{m}_{\text{est}}$. Dette problemet løses ved minste kvadraters metode. For hver observasjon defineres restleddet $r_i = d_i^{\text{obs}} - d_i^{\text{pre}}$, hvor den beste løsningen er den modellen som gir den minste totale feilen.

Normen $\|\mathbf{r}\|$ av en vektor \mathbf{r} er et mål av størrelsen eller lengden. L_n normen er basert på summen av elementene til en vektor i en n -te potens,

$$L_n \text{ norm: } \|\mathbf{r}\|_n = \left[\sum_i |r_i|^n \right]^{1/n}. \quad (3.5)$$

Høyere norm gir suksessivt større vekt til det største elementet av \mathbf{r} . I denne oppgaven benyttes L_2 normen til å løse det inverse problemet med minste kvadraters metode. Den finner løsningen som minimerer summen av de kvadrerte feilene, og statistisk er L_2 -norm løsningen den mest sannsynlige dersom datastøyen er normalfordelt.

Løsning ved minste kvadraters metode er gitt ved

$$\mathbf{m}_{L_2} = \min_{\mathbf{m}} \|\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_2^2. \quad (3.6)$$

Her er objektivfunksjonen $f(\mathbf{m})$ som skal minimeres

$$f(\mathbf{m}) = \mathbf{m}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{m} + 2\mathbf{d}^T \mathbf{G} \mathbf{m} + \mathbf{d}^T \mathbf{d} \quad (3.7)$$

og

$$\nabla f(\mathbf{m}) = 2\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{m} - 2\mathbf{G}^T \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Dette gir normalligningene (3.9) som brukes til å finne minste kvadraters løsning (3.10),

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{m} = \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{m}_{L_2} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}. \quad (3.10)$$

Dersom \mathbf{G} har full kolonnerank eksisterer $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$, og med lineært uavhengige kolonner i \mathbf{G} , kan det vises at normalligningen har nøyaktig en løsning (Aster et al., 2005). Ved uavhengig og normalfordelt datastøy $N(0, \sigma)$, er den minste kvadraters løsningen en forventningsrett estimator, i.e., den forventede verdien er lik den sanne løsningen,

$$\text{Exp}[\mathbf{m}_{L_2}] = \mathbf{m}_{\text{sann}}. \quad (3.11)$$

3.2.2 Komplekse tall

Elektromagnetiske bølger involverer komplekse tall, noe som fører til at definisjonen av L_2 normen må endres. En enkel endring er definert ved $\|\mathbf{v}\|_2^2 = \mathbf{v}^H \mathbf{v}$, hvor \mathbf{v}^H er *Hermitisk transponert* (Menke, 1989), den transponerte til den komplekskonjugerte vektoren \mathbf{v} . Denne endringen forsikrer at normen alltid er et positivt reelt tall. Når L_2 -norm løsningene er utledet for komplekse tall, er resultatene ganske like til reelle tall; den eneste forskjellen er at den Hermitisk transponerte erstatter den vanlige transponerte (Menke, 1989). For eksempel er den minste kvadrats løsningen

$$\mathbf{m}_{L_2} = (\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H \mathbf{d}. \quad (3.12)$$

3.2.3 Statistiske betraktninger og vektete minste kvadrater

Dersom målet er å finne en løsning fra en samling datapunkt med tilfeldig støy, blir det inverse problemet å finne den beste løsningen som passer dataene sett fra et statistisk synspunkt. Ved tilfeldig fordelt Gaussisk støy i dataene, kan en felles tetthetsfunksjon (JDF) for dataene \mathbf{d} beskrives som et produkt av alle sannsynlighetstetthetsfunksjonene (PDF) til hver observasjon,

$$f(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = f_1(d_1|\mathbf{m}) \cdot f_2(d_2|\mathbf{m}) \cdots f_m(d_m|\mathbf{m}). \quad (3.13)$$

Ved sannsynlighetsmaksimering (MLE fra engelsk “maximum likelihood estimation”) søkes den modellen som har høyest sannsynlighet for å gi den riktige løsningen, hvor rimelighetsfunksjonen $L(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = f(\mathbf{d}|\mathbf{m})$. Rimelighetsfunksjonen til et fullstendig datasett, er produktet av de

individuelle sannsynlighetene. Med normalfordelt støy $N(0, \sigma_i)$, hvor σ_i er standardavviket til den i te observasjonen, er maksimeringsproblemet ved å se bort i fra konstante faktorer, gitt ved (Aster et al., 2005)

$$\max_{\mathbf{m}} L(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = \max_{\mathbf{m}} \prod_{i=1}^m e^{-(d_i - (\mathbf{G}\mathbf{m})_i)^2 / \sigma_i^2}. \quad (3.14)$$

Ved å ta logaritmen av (3.14) og endre fortegn, blir maksimeringsproblemet omgjort til et minimeringsproblem,

$$\max_{\mathbf{m}} \log \prod_{i=1}^m e^{-(d_i - (\mathbf{G}\mathbf{m})_i)^2 / \sigma_i^2} = \min_{\mathbf{m}} \sum_{i=1}^m \frac{(d_i - (\mathbf{G}\mathbf{m})_i)^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.15)$$

Bortsett fra faktoren $1/\sigma_i^2$, er dette nøyaktig det samme som å løse (3.10).

For å ta hensyn til datastøyen i løsningen, skaleres ligningssystemet med en diagonal vektematrise,

$$\mathbf{W} = \text{diag}\{1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_m\}. \quad (3.16)$$

Videre er $\mathbf{G}_w = \mathbf{W}\mathbf{G}$ og $\mathbf{d}_w = \mathbf{W}\mathbf{d}$, som gir en vektet minste kvadraters løsning på formen

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{L_2} &= (\mathbf{G}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{d} \\ &= (\mathbf{G}_w^T \mathbf{G}_w)^{-1} \mathbf{G}_w^T \mathbf{d}_w. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Kovarians er et mål på de lineære avhengigheten mellom to variabler. Mapping mellom data og modellkovarians er gitt ved

$$\text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{d}) = \mathbf{A}\text{Cov}(\mathbf{d})\mathbf{A}^T, \quad (3.18)$$

hvor \mathbf{A} opererer på \mathbf{d} med en generell lineær transformasjon. Ved uavhengig, normalfordelt støy, er datakovariansen

$$\text{Cov}(\mathbf{d}) = \mathbf{C}_D = \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (3.19)$$

Merk at den inverse av kovariansmatrisen er nøyaktig det samme som kvadratet av vektematrisen, $\mathbf{C}_D^{-1} = \mathbf{W}^2$. Ved vektning av datavektoren, er $\text{Cov}(\mathbf{d}_w) = \mathbf{I}_m$ og $\mathbf{A} = (\mathbf{G}_w^T \mathbf{G}_w)^{-1} \mathbf{G}_w^T$. Konvariansmatrisen til \mathbf{m}_{L_2} i ligning (3.17) er da (Aster et al., 2005),

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{m}_{L_2}) &= (\mathbf{G}_w^T \mathbf{G}_w)^{-1} \mathbf{G}_w^T \mathbf{I}_m \mathbf{G}_w (\mathbf{G}_w^T \mathbf{G}_w)^{-1} \\ &= (\mathbf{G}_w^T \mathbf{G}_w)^{-1} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Basert på Menke (1989), er kovariansmatrisen for komplekse tall,

$$\text{Cov}(\mathbf{d}) = (\sigma \mathbf{I})^H (\sigma \mathbf{I}). \quad (3.21)$$

3.2.4 Singulær verdi dekomposisjon

Singulær verdi dekomposisjon (SVD) er en metode for å analysere og løse minste kvadrats problemer til dårlig stilte system eller systemer som ikke har full rang. I SVD blir matrisen \mathbf{G} faktorisert til

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T, \quad (3.22)$$

hvor \mathbf{U} er en $M \times M$ ortogonal matrise med kolonner som er enhetsbasisvektorer som spanner datarommet, R^m . \mathbf{V} er en $N \times N$ ortogonal matrise hvor kolonnene er basisvektorer som spanner modellrommet, R^n . \mathbf{S} er en $M \times N$ diagonal matrise med positive diagonale element kalt singulære verdier. De singulære verdiene i \mathbf{S} er ordnet fra høye til lave singulære verdier, $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\min(M,N)} \geq 0$. Når noen av de singulære verdiene er null, kan SVD av \mathbf{G} forenkles til kompakt form,

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_p \mathbf{S}_p \mathbf{V}_p^T. \quad (3.23)$$

Kun de p første singulære verdiene større enn null tas med i faktoriseringen, hvor

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Kolonnene til \mathbf{U}_p danner en ortonormal basis for kolonnerommet til operatormatrisen $R(\mathbf{G})$ og $N(\mathbf{G}^T) + R(\mathbf{G}) = R^m$ (Aster et al., 2005). De resterende kolonnene \mathbf{U}_0 danner derfor en ortonormal basis for nullrommet til \mathbf{G}^T , $N(\mathbf{G}^T)$ kalles datanullrommet. På samme måte vil kolonnene til \mathbf{V}_0 danne en ortonormal basis for $N(\mathbf{G})$, hvor $N(\mathbf{G})$ kalles modellnullrommet.

SVD kan benyttes til å lage en generalisert pseudoinvers av \mathbf{G} , også kaldt Moore-Penrose pseudoinvers,

$$\mathbf{G}^\dagger = \mathbf{V}_p \mathbf{S}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T. \quad (3.24)$$

Den pseudoinverse løsningen er

$$\mathbf{m}_\dagger = \mathbf{G}^\dagger \mathbf{d}. \quad (3.25)$$

Fordelen med den generalisert pseudoinvers er at \mathbf{G}^\dagger , og derfor \mathbf{m}_\dagger , alltid eksisterer.

Singulær verdi dekomposisjon gir informasjon om operatormatrisen \mathbf{G} , og dens generaliserte inverse matrise \mathbf{G}^\dagger . For tilfellet som blir behandlet i denne oppgaven, er antall datapunkt større enn antall modellparametre, $M > N = p$. Da har \mathbf{G} et trivielt modellnullrom $N(\mathbf{G})$, et ikke-trivielt datanullrom $N(\mathbf{G}^T)$, og $R(\mathbf{G})$ er et ekte underrom av R^m , $R(\mathbf{G}) \subset R^m$. Den

generaliserte inverse løsningen er da en minste kvadrats løsning,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_{\dagger} &= (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} \\
 &= \mathbf{V}_p \mathbf{S}_p^{-2} \mathbf{V}_p^T \mathbf{V}_p \mathbf{S}_p \mathbf{U}_p^T \mathbf{d} \\
 &= \mathbf{V}_p \mathbf{S}_p^{-1} \mathbf{U}_p^T \mathbf{d} \\
 &= \mathbf{G}^{\dagger} \mathbf{d}.
 \end{aligned}$$

Denne løsningen er unik, men kan ikke passe dataene nøyaktig.

Den generaliserte inverse løsningen har ingen bidrag fra nullrommet, men små singulære verdier i nevneren kan føre til tilsvarende høye verdier i den korresponderende modellrom basisvektoren \mathbf{v}_i , som vil dominere løsningen. Dersom vi inkluderer små singulære verdier blir den inverse løsningen ustabil ved datastøy tilstede. Ved å utelukke de minste singulære verdiene vil ikke løsningen være like sensitiv til støy i dataene, men oppløsningen vil bli dårligere, og forventnings-skeivhet blir introdusert i løsningen. Målet med regularisering er å takle disse singulære verdiene på en slik måte at man får en best mulig løsning med hensyn til både støy og oppløsning.

3.3 Tikhonovregularisering

Tikhonovregularisering er gjerne den mest brukte teknikken for å regularisere diskrete dårlig stilte problemer. Løsningen kan enkelt uttrykkes ved hjelp av SVD av \mathbf{G} , og er en variant av den generaliserte inverse løsningen som effektivt gir mer vekt til de største singulære verdiene, og mindre vekt til de laveste singulære verdiene i løsningen (Aster et al., 2005).

I Tikhonov regularisering betraktes alle løsninger hvor $\|\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_2 \leq \delta$ for en liten skalar δ , og Tikhonov løsningen er den løsningen med minst norm $\|\mathbf{m}\|$. Omgjort til et dempet minste kvadraters problem, er

$$\min_{\mathbf{m}} \|\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_2^2 + \alpha^2 \|\mathbf{m}\|_2^2, \quad (3.26)$$

hvor α er regulariseringsparameter. Det siste leddet i ligning (3.26) kalles straffefunksjonen. Regulariseringsparameteren kan finnes ved ulike metoder, blant annet benyttes L-kurve prinsippet og generalisert kryss-validering (GCV) for å finne den beste α verdien. Disse metodene er beskrevet senere i oppgaven.

Dempede minste kvadrater er ekvivalent til det ordinære minste kvadraters problem ved å legge et ledd til problemet på følgende måte,

$$\min_{\mathbf{m}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \alpha^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{m} - \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2^2. \quad (3.27)$$

Når α er ulik null, er de siste N rekkene til den utvidede matrisen lineært uavhengige. Da er ligning (3.27) et full rang minste kvadraters problem som kan løses ved metoden til normal ligningene, i.e.

$$\mathbf{m}_\alpha = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \alpha^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}. \quad (3.28)$$

Her er \mathbf{m}_α er en nulte-ordens Tikhonovregularisert løsning til $\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d}$. Ved SVD av operatormatrisen \mathbf{G} i ligning (3.28) er løsningen gitt ved

$$\mathbf{m}_\alpha = \sum_{i=1}^k \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha^2} \frac{(\mathbf{U}_{:,i})^T \mathbf{d}}{s_i} \mathbf{V}_{:,i}, \quad (3.29)$$

hvor $k = \min(M, N)$, slik at alle singulære verdier er inkludert (Aster et al., 2005). Det første leddet i (3.29) kalles filterfaktor,

$$f_i = \frac{s_i^2}{s_i^2 + \alpha^2}. \quad (3.30)$$

For $s_i \gg \alpha$ er $f_i \approx 1$, og for $s_i \ll \alpha$ er $f_i \approx 0$. For singulære verdier mellom disse to ekstremene, vil f_i avta monotont når s_i avtar. Uttrykt ved SVD i ligning (3.29), er det lett å se hvordan α vil påvirke de singulære verdiene ved regularisering.

3.4 Total variasjon (TV)

I første- og andre ordens Tikhonovregularisering blir diskontinuiteter i modellen glattet ut i den inverse løsningen. Straffefunksjonen i TV-regularisering straffer ikke diskontinuiteter i modellen mer en glatte overganger, metoden er derfor god for å løse problemer med skarpe kontraster (Aster et al., 2005). TV regulariseringsfunksjonen er

$$\begin{aligned} TV(\mathbf{m}) &= \sum_{i=1}^{n-1} |m_{i+1} - m_i| \\ &= \|\mathbf{L}\mathbf{m}\|_1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

hvor

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

TV-funksjonen brukes sammen med L_1 eller L_2 -normen av restleddet, og løses ved iterative metoder.

3.5 Valg av regulariseringsparameter

For å finne en god løsning som både bevarer oppløsning og stabilitet, må regulariseringsparameteren α velges på en god måte. MATLAB programpakken **regutools** (Hansen, 2009) inneholder ulike algoritmer som kan løse forskjellige inverse problem, og program som brukes til å velge α . Hansen (2008) gir en beskrivelse av teorien bak alle programmene. I denne oppgaven benyttes programmene **gcv** og **l_curve** til å finne regulariseringsparameteren.

3.5.1 Generalisert kryssvalidering

Generalisert kryssvalidering (GCV) bygger på evnen til å forutse observasjoner som ikke benyttes til løsningsestimeringen. I ordinær (på engelsk også kalt “leave-one-out” (LOO)) kryssvalidering betraktes modeller beregnet når ett av de M datapunktene er utelatt i løsningsprosessen. Ved Tikhonovregularisering løser LOO-metoden M ligninger på formen

$$\min \sum_{i \neq k} ((\mathbf{G}\mathbf{m})_i - d_i)^2 + \alpha^2 \|\mathbf{m}\|_2^2. \quad (3.32)$$

Målet er å finne den regulariseringsparameteren α som minimerer de forutsette feilene for alle k (Aster et al., 2005)

$$\min V_0(\alpha) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m ((\mathbf{G}\mathbf{m}_\alpha^{[k]})_k - d_k)^2. \quad (3.33)$$

Dette er en svært tidkrevende prosess. Generalisert kryssvalidering forenkler denne utregningen og minsker antall beregninger betraktelig. Først defineres dataene

$$\tilde{d}_i = \begin{cases} (\mathbf{G}\mathbf{m}_\alpha^{[k]})_k & i = k \\ d_i & i \neq k. \end{cases}$$

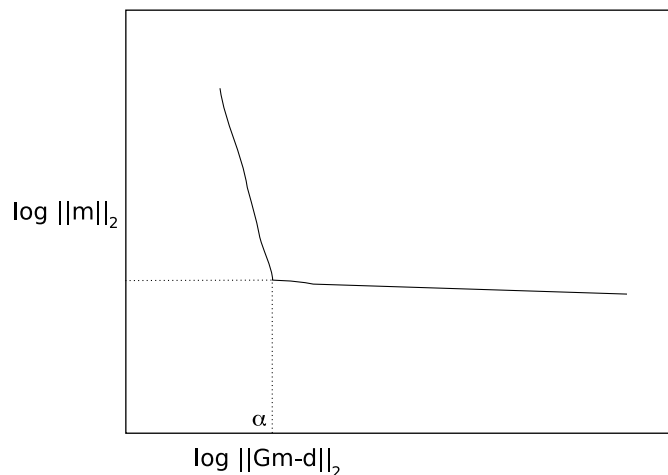
Ved LOO-lemma finnes løsningen (Aster et al., 2005)

$$\mathbf{m}_\alpha^{[k]} = \min ((\mathbf{G}\mathbf{m})_k - \tilde{d}_k)^2 + \sum_{i \neq k} ((\mathbf{G}\mathbf{m})_i - \tilde{d}_i)^2 + \alpha^2 \|\mathbf{m}\|_2^2 \quad (3.34)$$

$$= \min \|\mathbf{G}\mathbf{m} - \tilde{\mathbf{d}}\|_2^2 + \alpha^2 \|\mathbf{m}\|_2^2. \quad (3.35)$$

Videre er

$$\mathbf{m}_\alpha^{[k]} = \mathbf{G}_\alpha \tilde{\mathbf{d}}, \quad (3.36)$$



Figur 3.1: Viser enkelt prinsippet for å velge regulariseringsparameteren α ved L-kurve prinsippet. På L-kurven velges den verdier nærmest hjørnet.

hvor $\mathbf{G}_\alpha = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \alpha^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T$. I GCV brukes (3.36) til å fjerne $\mathbf{m}_\alpha^{[k]}$ fra (3.33). Med litt manipulering og forenklinger kan $V_0(\alpha)$ i ligning (3.33) tilnærmes til (Aster et al., 2005)

$$V_0(\alpha) \approx \frac{m \|\mathbf{G}\mathbf{m}_\alpha - \mathbf{d}\|_2^2}{\text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{G}_\alpha)^2}. \quad (3.37)$$

Under fornuftige antagelser med hensyn til støy og glatthet i \mathbf{m}_{sann} , vil α verdien som minimerer (3.37) gå mot α verdien som minimerer forventningsverdien $\text{Exp}[\|\mathbf{G}\mathbf{m}_\alpha - \mathbf{d}\|]$ når antall datapunkt M går mot uendelig. Under de samme forutsetningene vil $\text{Exp}[\|\mathbf{m}_{\text{sann}} - \mathbf{m}_\alpha\|_2]$ gå mot 0 når M går mot uendelig (Aster et al., 2005). I praksis er antall datapunkt gitt slik at disse grensene ikke er direkte anvendbare, men de gir en god motivasjon til å bruke GCV metoden til å velge regulariseringsparameteren videre i oppgaven.

3.5.2 L-kurve prinsippet

L-kurve prinsippet er en annen måte å velge α på. Ved å plotte kurvene med optimale verdier til $\|\mathbf{m}\|_2$ og $\|\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_2$ på en log-log skala, vil kurven ofte ha en karakteristisk L-form. Dette skjer fordi $\|\mathbf{m}\|_2$ er en avtagende funksjon av α , og $\|\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_2$ er en stigende funksjon av α . Hvor skarp hjørnet på L-kurven er avhenger av problemet, men den er ofte lett å gjenkjenne. Ved L-kurve prinsippet er regulariseringsparameteren α den verdien nærmest hjørnet på kurven, som illustrert i figur 3.1.

3.6 Analyse av det inverse problemet

Når en løsning er funnet, er det viktig å undersøke hvor troverdig løsningen er, og hvor sannsynlig det er at løsningen representerer den sanne modellen.

Stabilitet i løsningen

Kondisjonstall til matrisen som inverteres forteller hvor stabil løsningen er

$$\kappa = \text{cond}(\mathbf{G}_\alpha) = \frac{s_1}{s_k}, \quad (3.38)$$

hvor $k = \min(m, n)$ og s er de singulære verdiene til \mathbf{G}_α matrisen. I MATLAB kan kommandoen **cond** benyttes til å beregne kondisjonstall. Kondisjonstallet er uavhengig av normen til løsningen, det gir en øvre grense på hvor unøyaktig løsningen til et ligningssystem kan være på grunn av feilen i dataene,

$$\frac{\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{obs}}\|}{\|\mathbf{m}\|} < \kappa \frac{\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{\text{obs}}\|}{\|\mathbf{d}\|}. \quad (3.39)$$

Det er lurt å anta feil i modellen på størrelsen til κ .

Gyldig løsning

Ved kjent normalfordelt, uavhengig datastøy, er objektivfunksjonen med vekting

$$f(\mathbf{m}) = (\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d})^T \mathbf{W}^2 (\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}) \quad (3.40)$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon}^T \sigma^{-2} \mathbf{I} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.41)$$

Når $M \gg N$, er den forventede verdien og variansen til objektivfunksjonen

$$\text{Exp}[\|f(\mathbf{m}_{\text{sann}})\|_2^2] = M - N, \quad (3.42)$$

$$\text{Var}[\|f(\mathbf{m}_{\text{sann}})\|_2^2] = \sqrt{2(M - N)}, \quad (3.43)$$

(Aster et al., 2005). For å ha en gyldig estimert løsning, skal verdien objektivfunksjonen være

$$f(\mathbf{m}_{\text{est}}) = M - N + \beta \sqrt{2(M - N)}, \quad (3.44)$$

hvor β er en konstant av 1 orden.

Monte Carlo simulering

For ikke lineære inverse problem, kan det være vanskelig å forstå hvordan usikkerhet og støy i dataene vil påvirke de estimerte modellparametrene. Ved Monte Carlo simulering, beregnes en samling data med normalfordelt, tilfeldig støy, hvor de statistiske egenskapene til den korresponderende modellen studeres. Metoden gir et estimat på sannsynlighetsfordelingen til den estimerte modellen.

Kapittel 4

Forovermodellering av 3D og 4D CSEM-data

I dette kapittelet beregnes numeriske eksempel av EM-feltet ved Born-, SLN- og fullintegral-metode (FI) ved ulike tidspunkt for et reservoar i produksjon. Først introduseres metode, modell og parametre benyttet til forovermodellering, deretter sammenlignes tilnærmingene av EM-feltet med FI-løsningen. Kvaliteten til tilnærmingemetodene undersøkes også ved å endre konduktivitetskontrasten mellom bakgrunnsmodellen og reservoaret. Formålet er å undersøke hvor lenge de to tilnærmingene er tilstrekkelig nøyaktige med tanke på endring i konduktivitetskontrast, og hvorvidt disse enkle metodene kan benyttes i 4D-undersøkelser. SLN er forventet å fungere bedre enn Born for store konduktivitetskontraster. Dersom SLN for de modellene som benyttes gir et godt estimat av feltet, åpner det muligheten for lineær inversjon av reelle CSEM-feltdata i \mathbf{t} -matrisen.

4.1 Forovermodellering med integralligningsmetoder

Forovermodellering av elektromagnetiske bølger begynner med en numeriske løsning av bevegelsesligningen (2.43). Programpakken INTEM3DQL (Hursan et al., 2006) benyttes for å beregne det elektromagnetiske feltet for en gitt kilde, mottakergeometri og modell. FI-feltet beregnes ved å løse integralligningen ved bikonjugent gradient stabilisert (BICGSTAB) metode (Hursan og Zhdanov, 2002), som er anbefalt ved komplekse geoelektriske strukturer med et stort antall gridceller (Hursan et al., 2006). Programpakken beregner også feltet ved Born-metoden, mens for SLN erstattes σ , som er inndata i Born-approksimasjoen, med en tilsynelatende σ_t . Den frekvensuavhengige modellparameteren \mathbf{t} gitt i ligning (2.69), er for

hver gridcelle

$$t = \frac{3\sigma^{(0)}\Delta\sigma}{\sigma + 2\sigma^{(0)}}. \quad (4.1)$$

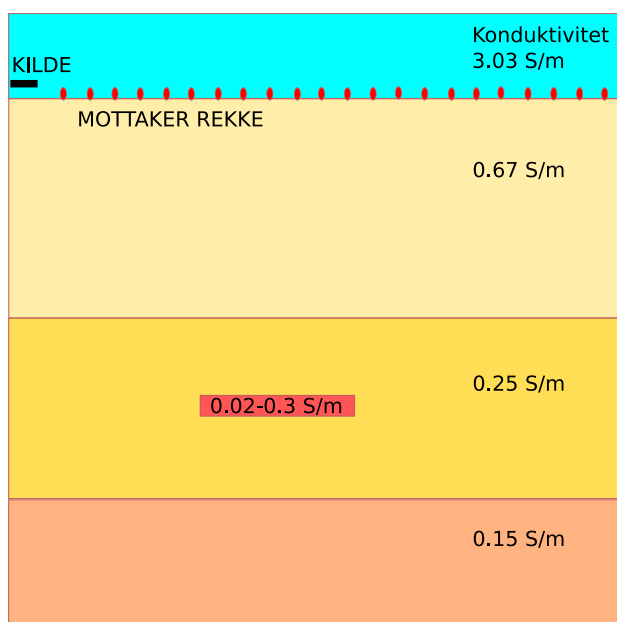
Videre er den totale konduktivitetsverdien som brukes for å beregne det elektriske feltet $\sigma_t = t + \sigma^{(0)}$,

$$\sigma_t = \frac{4\sigma\sigma^{(0)} - (\sigma^{(0)})^2}{\sigma + 2\sigma^{(0)}}. \quad (4.2)$$

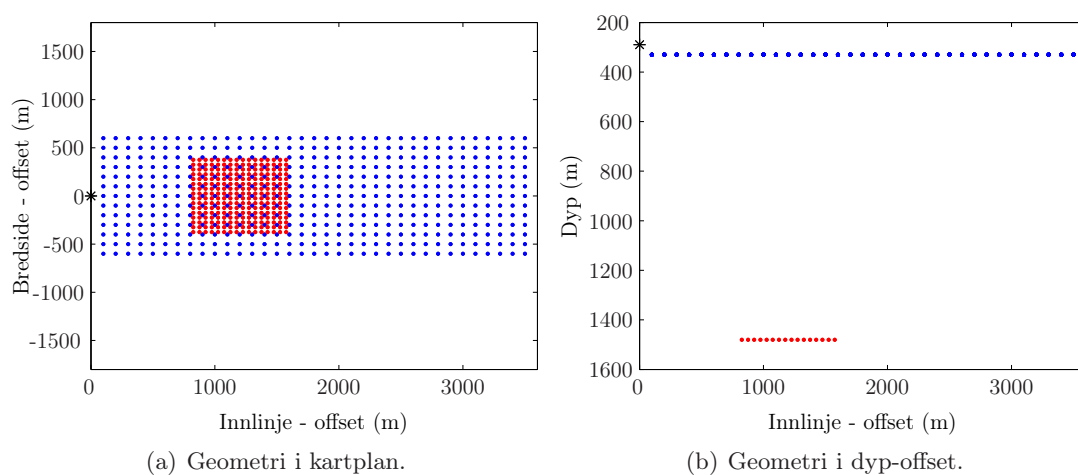
Eksempler på andre metoder som kan benyttes for å løse integralligningen, er endelig differanse (FD fra engelsk “finite difference”) og endelig element (FE fra engelsk “finite element”) (Krebes, 2004). Disse kan brukes til å beregne bakgrunnsfeltet $\mathbf{E}^{(0)}$ i det anomale volumet, som videre er inndata i forovermodelleringen ved Born (2.80) og SLN (2.81) metodene. Den største fordelene ved FD er at den danner et fullstendig bølgefelt med riktige amplituder og faser, men det er en svært tidkrevende numerisk metode. Ulempen med FE er at den er vanskelig å implementere. Maaø (2007) demonstrerer en rask forovermodelleringsmetode ved 3D endelig differanse i tidsdomenet (TDFD), der det er mulig å modellere flere frekvenskomponenter. Metoden er bl.a. benyttet i Bhuyian (2009), den krever lite minne, og er i følge Maaø (2007) rask sammenlignet med mer tradisjonelle forovermodelleringsmetoder i tidsdomenet (Yee, 1966).

4.2 Konduktivitetsmodell og forovermodelleringsparametre

Viktige faktorer i CSEM-forovermodellering er vanddyb, havbunnstopografi, reservoardyp, de elektriske egenskapene til bakgrunnsmodellen, geometri og egenskapene til reservoaret (Ellingsrud et al., 2002; Eidesmo et al., 2002; Johansen et al., 2005). I denne oppgaven benyttes den syntetiske konduktivitetsmodellen fra Zhigang et al. (2008). Topp reservoar ligger på 1480 meters dyp, 1150 meter under havbunnen, og lagene i undergrunnen har konduktivitetsverdier som vist i figur 4.1. Kilden er en 100 meter lang HED-antenne som sender ut elektriske strømmer på 1000 A/m, 40 meter over havbunnen. Dette skaper et dipolmoment på 100.000 A. Frekvensen er 0.25 Hz, den samme som brukes til forovermodellering og inversjon av CSEM-data fra Trollfeltet i Zhigang et al. (2008) og Zach et al. (2009). Mottakerne er plassert i 13 mottakerrekker med 35 mottakere i hver rekke, som vist i figur 4.2. Totalt er 455 mottakere fordelt på havbunnen med 100 meter mellom hver mottaker, gridgeometri viser store fordeler overfor vanlig linjegeometri (Lien og Mannseth, 2008; Bhuyian, 2009). Kilden er plassert 100 meter vest for første mottaker i midtrekken. Forovermodelleringen beregner x, y og z komponenten til det elektromagnetiske feltet, men kun x komponentene vil bli plottet opp for videre analyser.



Figur 4.1: Skisse over konduktivitetsmodellen benyttet i forovermodellering av det elektriske feltet, basert på modellen i Zhigang et al. (2008).



Figur 4.2: Geometrien til kilde og mottaker i (a) kartplan og (b) dyp-offset. Kilden (sort) er 40 meter over mottakerne (blått) på havbunnen på 330 meters dyp. Reservoaret (rødt) er på 1480 meters dyp.

Kilde og mottaker		Konduktivitetsmodell	
Mottakere (antall)	13×35	Lagtykkelse bakgrunnsmodell (m)	330, 850, 700
Dipol lengde (m)	100	$\sigma^{(0)}$ (S/m)	3.03, 0.67, 0.25, 0.15
Kildestyrke (A)	1000	Reservoar dyp (m)	1150
Frekvens (Hz)	0.25	Modell grid (antall)	16×16×1
Inntrengningsdyp (m)	1006	Gridcelle volum (m ³)	50×50×13

Tabell 4.1: Modellparametre benyttet i CSEM-forovermodellering. Her er m, meter og A, ampere.

Inndata til reservoarmodellen er vannmettningsverdier simulert i Eclipse for et reservoar i produksjon, hhv før produksjonsstart (t_0) og etter 2 (t_1) og 4 (t_2) år. Vannmetningene er beregnet av reservoarsimulatoren med 17% porøsitet, Gaussisk permeabilitetsfordeling med middelverdi 40 mD for horisontal permeabilitet, og 20 mD for vertikal permeabilitet. Porøsitetsverdien og vannmetningen benyttes sammen med $\sigma_w = 10$ S/m (Bhuyian, 2009) og $m, n = 2$ til å beregne konduktiviteten ved Archies lov (2.10). Reservoaret er $800 \times 800 \times 13$ m³ stort og diskretisert i $16 \times 16 \times 1$ gridceller. Volumet til hver gridcelle er $50 \times 50 \times 13$ m³ = 32500 m³. En kule med samme volum vil ha radius på $R \approx 20$ meter. Fra figur 5 i Habashy et al. (1993), er feilen (2.70) i det tilnærmede feltet med SLN i dette tilfellet 3%, sammenlignet med FI.

De ulike modellparametrene benyttet i forovermodelleringen er listet i tabell 4.1. Relativ feil i beregnet anomal amplitude beregnes ved

$$\varepsilon_A = \frac{|A_{\text{FI}} - A_{\text{kalk}}|}{|A_{\text{FI}}|} 100\%, \quad (4.3)$$

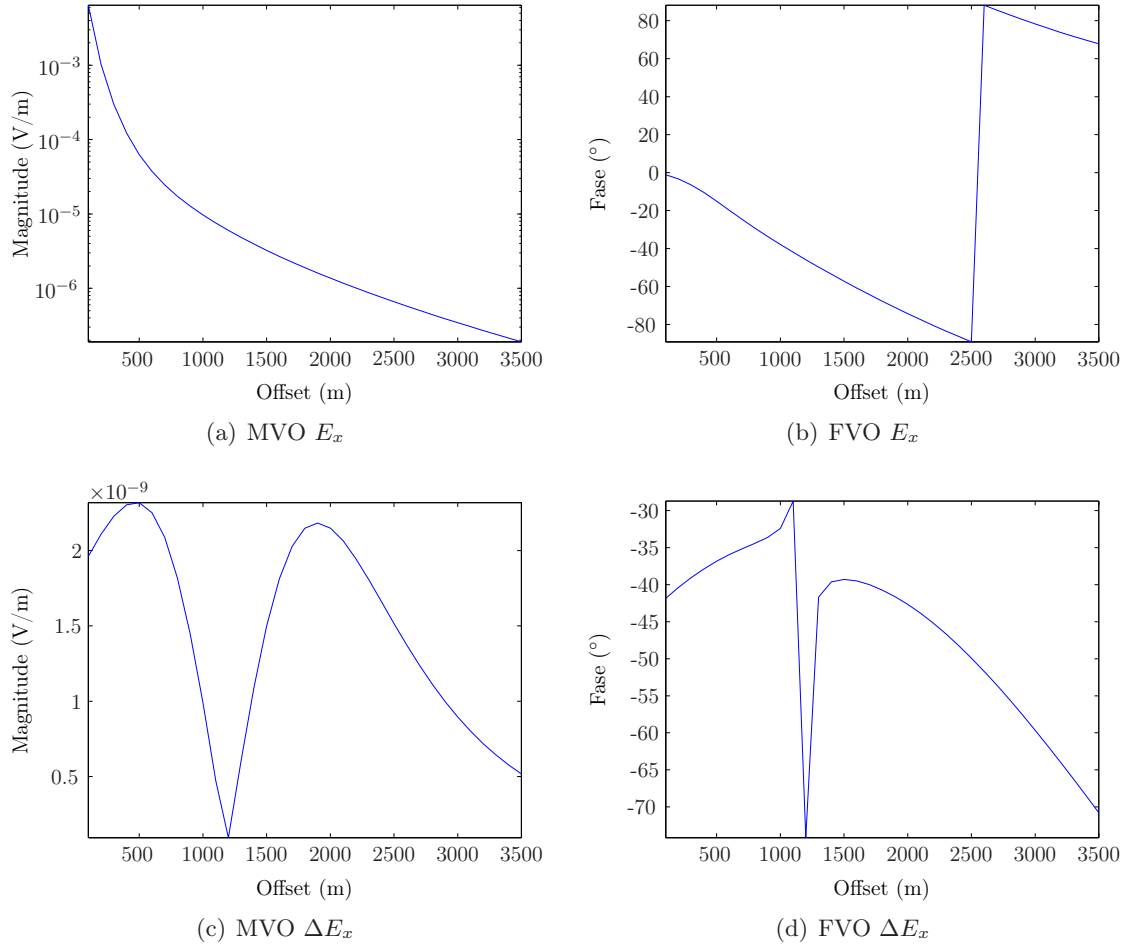
mens feilen i beregnede faseverdier blir beregnet som forskjellen i fase mellom FI- og tilnæringsmetodene

$$\varepsilon_\theta = \theta_{\text{FI}} - \theta_{\text{kalk}}. \quad (4.4)$$

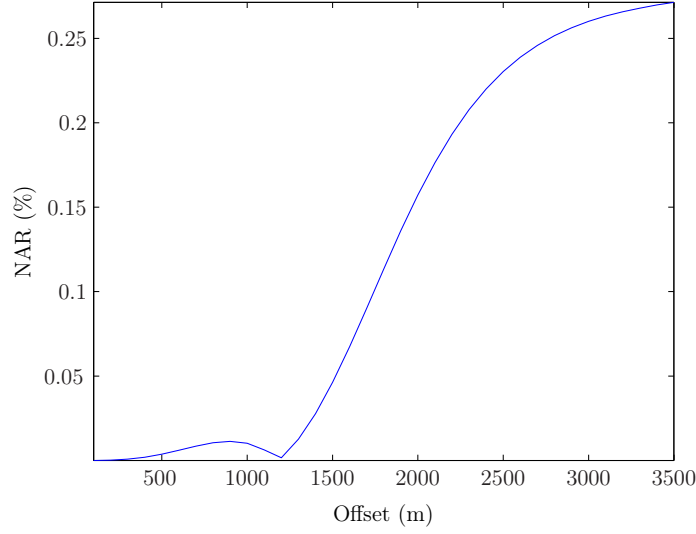
Her er A_{kalk} og θ_{kalk} er hhv kalkulert anomal amplitude og fase, ved Born- eller SLN-approksimasjonen.

4.2.1 Numerisk eksempel

Før produksjonsstart, er konduktiviteten i reservoaret lik for alle gridcellene. Resultatet av forovermodellering av EM-feltet med FI-løsning, er i dette tilfellet vist i figur 4.3. Her er magnitude og fase plottet mot offset (MVO og FVO), til det totale (a)-(b) og det anomale (c)-(d) elektriske feltet i den midterste mottakerrekken. Magnituden er styrken til det komplekse feltet i Volt/m, mens fasen er oppgitt i grader. Lavere FVO verdier i det anomale feltet sammenlignet med bakgrunnsfeltet indikerer et faseskifte, som kan skyldes et resistivt anomalt volum i undergrunnen (Johansen et al., 2007).



Figur 4.3: Plottet viser (a) AVO og (b) FVO til totalfeltet E_x og AVO (c) og FVO (d) til det anomale feltet ΔE_x . Merk logaritmisk t-aksen i (a).



Figur 4.4: Her er NAR (FI) plottet mot offset for basisundersøkelsen, hvor y-aksen oppgir magnituden til feltet med HC-reservoar i forhold til feltet uten HC-reservoar.

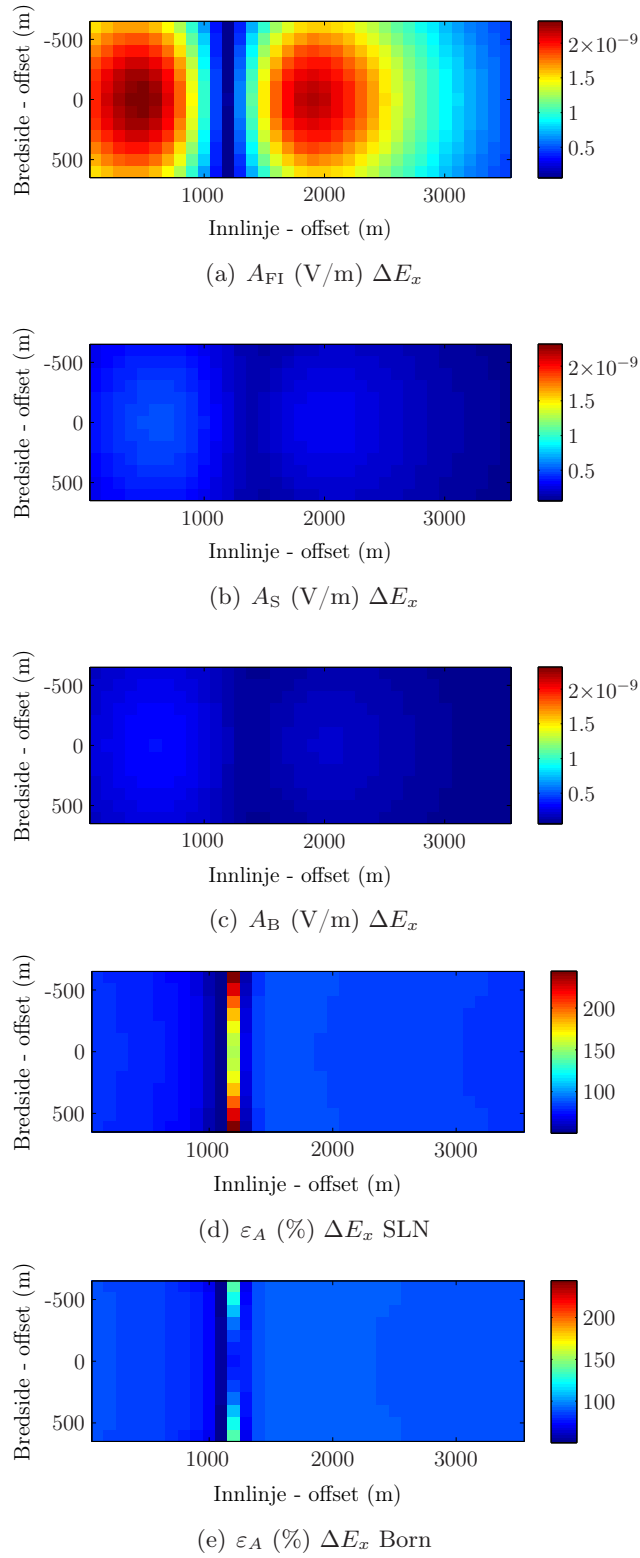
I forbindelse med oljeleting bør normalisert anomal amplitude respons (NAR) være større enn 15% for å øke sjansen til å finne hydrokarboner (Hesthammer et al., 2010). NAR er definert som normalisert forskjell i det elektriske feltet dannet av et hydrokarbonfylt reservoar, i forhold til bakgrunnsfeltet (Stefatos et al., 2009),

$$\text{NAR} = \frac{|E_x - E_x^{(0)}|}{E_x^{(0)}} = \frac{|\Delta E_x|}{E_x^{(0)}}. \quad (4.5)$$

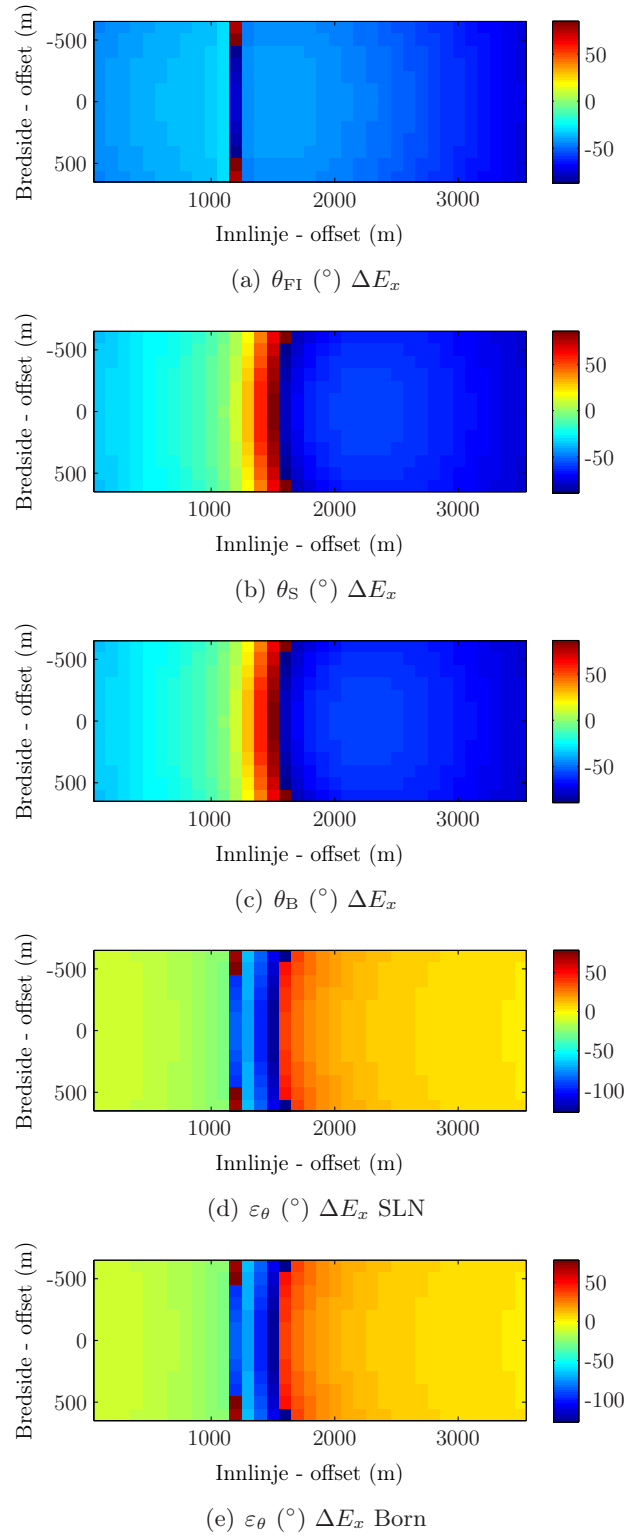
Figur 4.4 plotter NAR verdier fra FI-løsningen mot offset for den midterste mottakerrekken, med maksimum NAR 0.27% \ll 15%. På tross av lave NAR verdier, kan CSEM benyttes i 4D-sammenheng ettersom konduktiviteten i reservoaret og bakgrunnsmodellen er godt kjent.

Som vist i Gelius (2009) forventes Born-approksimasjonen å beregne et svakere felt enn FI-løsning. Figur 4.5 viser den anomale amplituden for alle mottakerne, når $\Delta\sigma = -0.232$. Her er $\sigma = 0.018$ S/m, og med $\sigma^{(0)} = 0.25$ S/m, blir $t = -0.3358$ S/m. Både (b) SLN og (c) Born underestimerer det anomale elektriske feltet kraftig, selv om SLN-metoden viser en noe høyere amplitudeverdi sammenlignet med Born. Den anomale fasen i figur 4.6 viser like verdier mellom SLN- og Born-approksimasjonen. På grunn av reelle inndata-verdier, $\Delta\sigma$ og \mathbf{t} , vil fasen kun avhenge av det komplekse bakgrunnsfeltet $\mathbf{E}^{(0)}$.

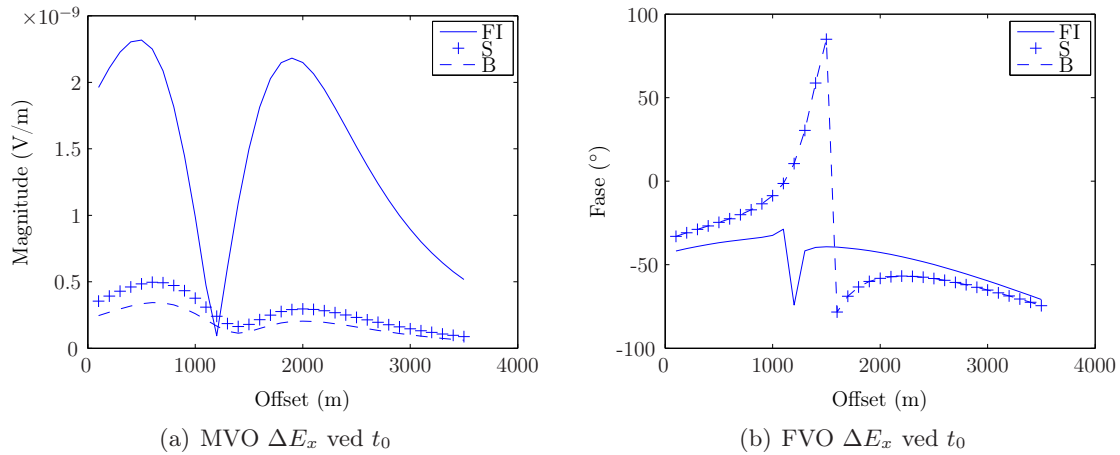
Dersom kontrasten øker, vil forskjellen mellom Born- og FI-løsningene øke (Habashy et al., 1993). Feilen i anomal amplitude og fase ved SLN- og Born-approksimasjonen er vist i figurene 4.5(d)-(e) og 4.6(d)-(e). Fargeskalaen er lik for feilen i SLN og Born. SLN viser den største feilen i amplitudeverdi, like over reservoaret, ellers er feilen sammenlignet med FI-løsningen



Figur 4.5: Amplitude (V/m) til ΔE_x ved tiden t_0 i alle mottakerne for (a) FI-, (b) SLN- og (c) Born-metoden. Feilen i SLN og Born i forhold til FI-løsningen er vist i (d) og (e).



Figur 4.6: Fasen ($^{\circ}$) til ΔE_x for (a) FI-, (b) SLN- og (c) Born-metoden, med relativ feil mellom approksimasjonene og FI i (e) og (d).



Figur 4.7: Kalkulert (a) MVO og (b) FVO til ΔE_x ved tiden t_0 . Reservoaret fra 800-1600 meter offset. Her plottes FI —, SLN + og Born —.

ganske lik for Born og SLN, rundt 100%.

For å sammenligne de genererte dataene lettere, er EM-feltet i midtrekken plottet som MVO og FVO i figur 4.7(a) og (b). Det er nå tydelig å se forskjellen mellom Born-, SLN- og FI-beregningene. SLN gir et noe sterkere signal enn Born, men underestimerer feltet kraftig sammenlignet med FI-løsning. Den store feilen i SLN-amplitude fra figur 4.5(d), er mellom de to kryssningspunktene for SLN og FI. Dataene presentert i dette eksempelet benyttes som basisdata i senere 4D-undersøkelser.

4.2.2 Gridcellestørrelsen

Store gridceller gir dårligere estimat av det elektromagnetiske feltet sammenlignet med FI (Habashy et al., 1993). De beste feltberegningene ved SLN-metoden i Habashy et al. (1993), er for cellevolum så små som 1 m^3 . Flere gridceller og mindre cellevolum vil i forovermodellering øke beregningstiden og ved inversjon gi dårligere betingede problem. Ved valg av gridcellestørrelse, er det ønskelig å bruke små nok gridceller slik at det i 4D-undersøkelser er mulig å følge vannfronten så nøyaktig som mulig. Samtidig er det ønskelig å ha minst mulig modellparametre å estimere.

For å teste hvor mye tilnæringsmetodene påvirkes av størrelsen på gridcellene, undersøkes ulike forgrovnninger av reservoaret under forovermodellering av det elektriske feltet. De ulike gridcellestørrelsene er listet i tabell 4.2, sammen med feilen i amplitude og fase i forhold til FI-løsning med 16×16 gridceller. Figur 4.8 viser hvordan FI-amplituden og fasen til det anomale

Antall gridceller	V gridcelle (m^3)	Metode	ε_A (%)	ε_θ (%)
$16 \times 16 \times 1$	$50 \times 50 \times 13$	SLN	82.54	74.08
		Born	87.89	74.08
		FI	—	—
$8 \times 8 \times 1$	$100 \times 100 \times 13$	SLN	82.62	73.92
		Born	87.94	73.92
		FI	2.42	1.723
$4 \times 4 \times 1$	$200 \times 200 \times 13$	SLN	82.81	73.66
		Born	88.08	73.66
		FI	6.04	2.63
$2 \times 2 \times 1$	$400 \times 400 \times 13$	SLN	83.75	72.37
		Born	88.73	72.37
		FI	8.57	4.11

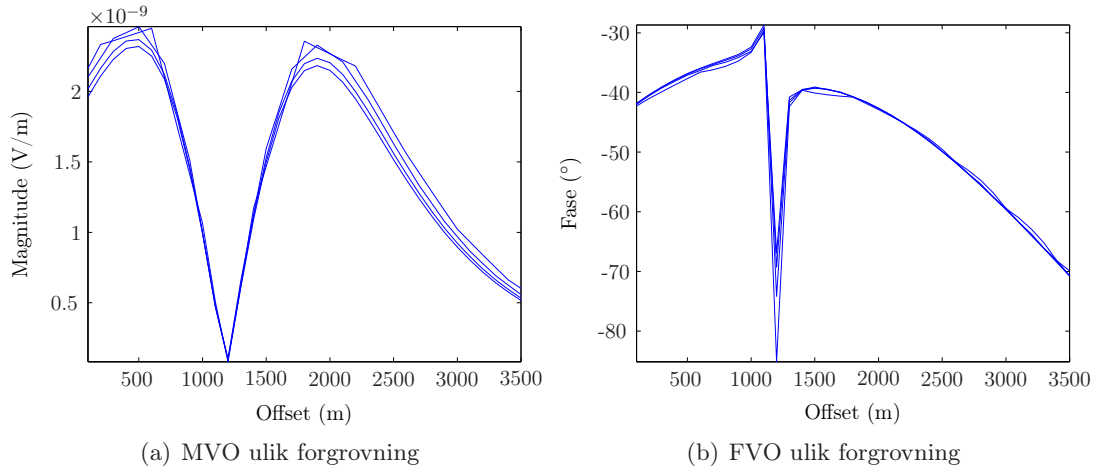
Tabell 4.2: Viser feil i estimert amplitude og fase i forhold til FI-løsning med 16×16 gridceller, for ulike forgrovnings av gridcellene i reservoaret.

feltet endres ved forgrovnings. Videre sammenlignes approksimasjonene og FI-løsningen i figur 4.9, for den fineste og groveste gridmodellen.

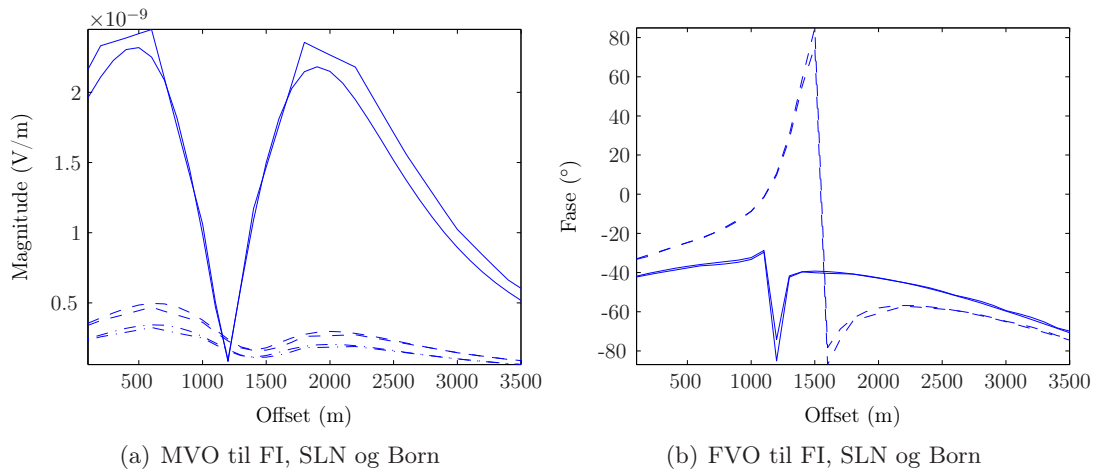
Amplitudefeilen til dataene beregnet ved SLN-metoden har en endring på rundt 1.2% fra den fineste til den groveste gridmodellen, mens Born-amplituden har en endring i feilen på rundt 0.8%. Fasefeilen minsker for et grovere grid, med 1.71% bedring fra 16×16 til 2×2 gridceller. SLN og Born gir dårlige tilnærminger av fasen, det legges derfor størst vekt på amplitudeberegningene. For de ulike forgrovningsene, endres nøyaktigheten i FI-løsningen betraktelig. Plottet viser en tydelig endring i både fase og amplitude for de groveste griddene. 16×16 gridceller blir benyttet videre i forovermodellering og inversjon for mest nøyaktige beregninger. Gridcellestørrelsen gir de beste modelleringsresultatene, har god dimensjon med tanke estimering av vannfronten og inneholder et passelig antall gridceller med hensyn til inversjon.

4.3 Effekt av kontrast

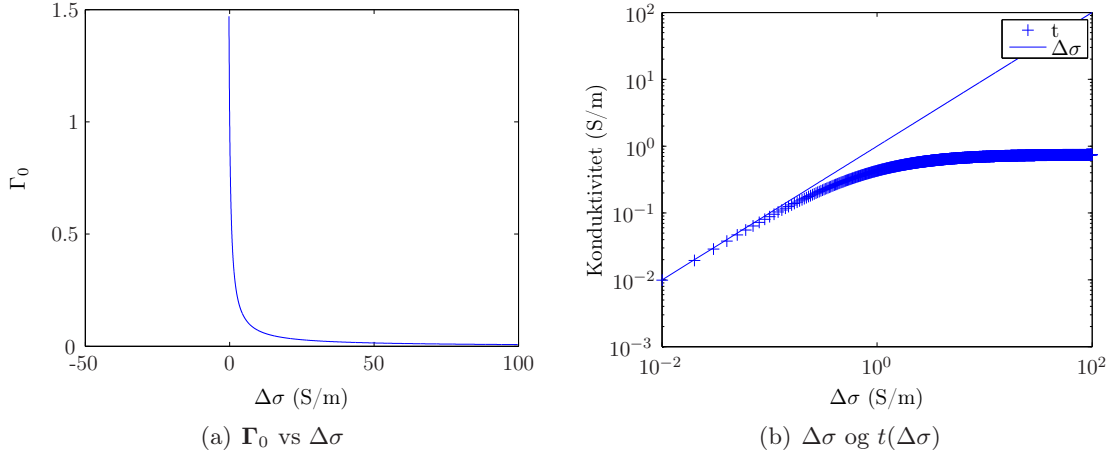
Spredningsstrømningene induisert inne i det anomale volumet er i Born-approksimasjonen representert ved $\Delta\sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$. Det elektriske feltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i reservoaret går mot null når $\Delta\sigma(\mathbf{r}) \rightarrow \infty$, men siden $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) \neq 0$, vil feltet beregnet med Born-approksimasjonen øke lineært med



Figur 4.8: Viser (a) MVO og (b) FVO til det anomale elektriske feltet beregnet ved FI for de ulike forgrovingene i tabell 4.2 i t_0 . Den groveste gridmodellen gir høyest amplitudeverdi.



Figur 4.9: Her er (a) MVO og (b) FVO til det anomale elektriske feltet beregnet ved FI (—), Born (—.) og SLN (---) plottet for å vise hvordan forgrovingen påvirker tilnærmingene av det elektriske feltet (16×16 og 2×2). Fasen er den samme for Born- og SLN (---).



Figur 4.10: (a) plotter Γ_0 mot $\Delta\sigma$, for ulike kontraster. (b) viser hvordan t -verdien benyttet i SLN-tilnærmingen stabiliserer seg etter hvert som kontrasten øker, $\sigma^{(0)} = 0.25$ S/m.

økende kontrast (Habashy et al., 1993). For et ikke-ledende volum, vil de indre spredningsstrømmene ved Born-approksimasjonen tilnærmes $-\sigma^{(0)} \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$ når $\sigma(\mathbf{r}) \rightarrow 0$, og den elektriske feltamplituden vil gå mot en tilnærmingslinje til en verdi som underestimerer den sanne responsen. Størrelsen til feilen mellom Born- og FI-løsningen vil også øke for større anomale volum og høyere frekvenser (Habashy et al., 1993).

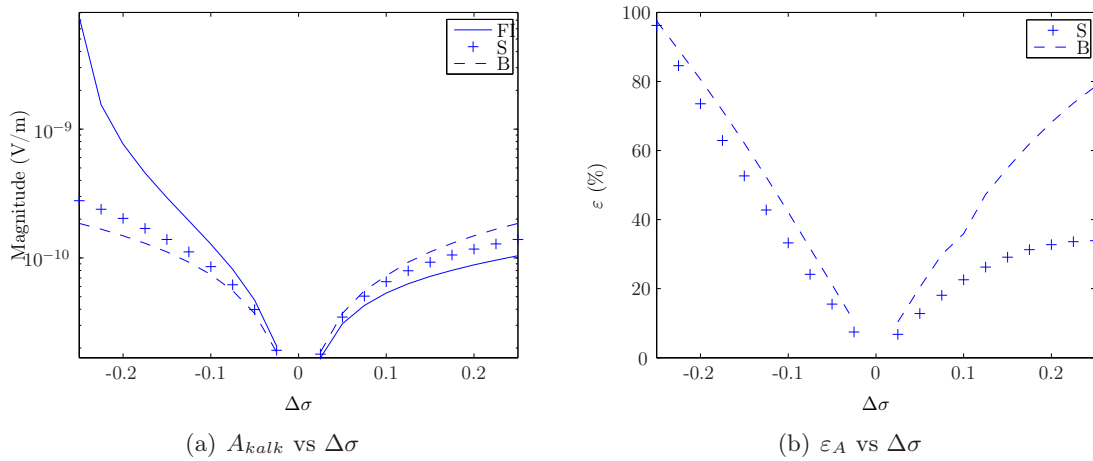
I SLN-approksimasjonen erstattes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ av $\Gamma_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$. Med en normalisert konduktivitetskontrast $Q(\mathbf{r}) = \Delta\sigma(\mathbf{r})/\sigma^{(0)}$, avgrenset av $[-1, \infty[$, vil $\Gamma_0(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$ for økende $Q(\mathbf{r})$ gå mot (French, 2003)

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \Gamma_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\Delta\sigma(\mathbf{r})}{\sigma^{(0)}}\right)^{-1} \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{Q(\mathbf{r})}{3}\right)^{-1} \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = 0.$$

I dette tilfelle vil det indre elektriske feltet forsvinne, som stemmer med at EM-felt dempes raskt i gode ledere. Når kontrasten går mot null, er

$$\lim_{Q \rightarrow 0} \Gamma_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = \lim_{Q \rightarrow 0} \left(1 + \frac{Q(\mathbf{r})}{3}\right)^{-1} \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = \lim_{Q \rightarrow 0} \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}).$$

SLN forventes å være nøyaktig siden $\Gamma_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$ leddet modellerer oppførselen til $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ med hensyn til de elektriske konduktivitetsendringene i en gjenstand (Torres-Verdin og Habashy, 1994). Figur 4.10(a) viser et plot av $\Gamma_0(\mathbf{r})$ som funksjon av $\Delta\sigma(\mathbf{r})$, og demonstrerer at $\Gamma_0(\Delta\sigma(\mathbf{r}))$ er en avtagende funksjon. Figur (b) viser hvordan $\mathbf{t}(\mathbf{r}) = \Delta\sigma(\mathbf{r}) \Gamma_0(\mathbf{r})$ går mot en konstant verdi når $\Delta\sigma(\mathbf{r})$ øker, her med $\sigma^{(0)} = 0.25$ S/m.



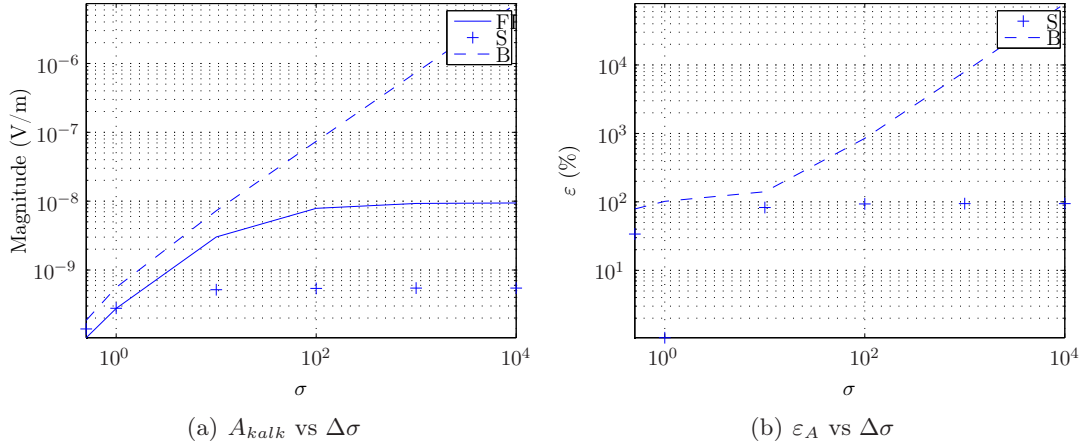
Figur 4.11: (a) viser hvordan amplituden til det registrerte anomale feltet, 1700 meter fra kilden, varierer som funksjon av $\Delta\sigma$. (b) viser feilen i beregnet anomal amplitude i forhold til FI-løsning.

4.3.1 Numerisk eksempel med varierende $\Delta\sigma$

Troverdigheten til Born- og SLN-approksimasjonene undersøkes i et forsøk med varierende konduktivitetskontraster. For en bakgrunnsmodell med konduktivitet på 0.25 S/m, vil varierende konduktivitet i reservoaret gi ulik respons på det elektromagnetiske feltet.

Først undersøkes Born og SLN med kontraster mellom $\Delta\sigma \pm 0.25$ S/m. Fra figur 2.1, varierer konduktiviteten til reservoaret, hvor $S_w = 0 - 100\%$, mellom $\sigma \approx 10^{-5} - 0.29$ S/m. Når konduktiviteten går mot null, går $\Delta\sigma \rightarrow -\sigma^{(0)} = -0.25$ S/m, mens for høye konduktiviteter er $\Delta\sigma_{\max} = 0.039$ S/m. Ved beregning av differansedata, vil konduktivitetskontrasten $\Delta\sigma_{\max} - \Delta\sigma_{\min}$ variere mellom 0 - 0.29 S/m. Figur 4.12 viser resultatene, hvor (a) plotter tilnærmningene til det anomale elektriske feltet sammen med FI-løsningen for mottakeren på 1700 meters offset, i midterste mottakerrekke. Feilen mellom approksimasjonene og FI-løsningen, beregnet med ligning (2.70) hvor $\mathbf{d} = \mathbf{E}_x$, er plottet i (b). Det observeres en avtagende feil ved avtagende kontrast. Når $\Delta\sigma < 0$ minsker feilen lineært, mens når $\Delta\sigma > 0$ øker feilen først lineært, men avtar etter hvert som det anomale volumet blir mer ledende. Feilen til dataene varierer i dette tilfellet fra 0 til 100%, i forhold til FI.

For større konduktivitetskontraster beregnes EM-feltet for samme mottaker når $\Delta\sigma$ er mellom 0 - 10^4 S/m. Konduktiviteten til en realistisk sedimentær bakgrunnsmodell vil ikke bli større konduktiviteten til vann, mellom 1 og 10 S/m. Konduktivitetskontraster vil derfor aldri bli større enn -10 S/m, når σ går mot null. Figur 4.12(a) viser hvordan den anomale amplituden til det registrerte feltet endrer seg ved økende σ , beregnet med $\sigma^{(0)} = 0.25$ S/m.



Figur 4.12: (a) viser hvordan amplituden til det registrerte anomale feltet varierer som funksjon av $\Delta\sigma$. (b) viser feilen i beregnet amplitude i forhold til FI-løsning.

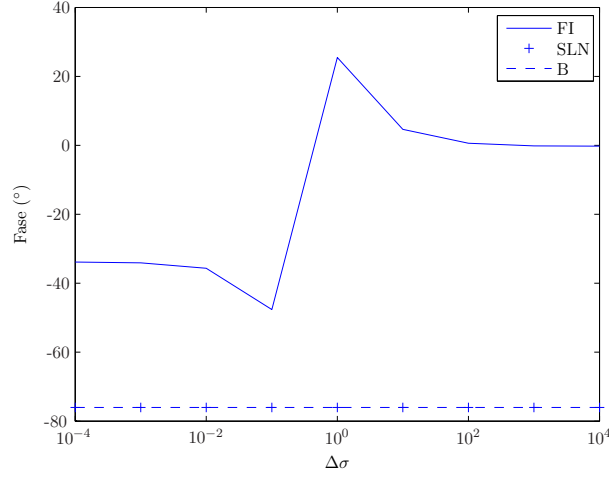
Ettersom kontrasten blir mindre, går tilnærmingene mot FI-løsningen. Feltberegningen ved Born-approksimasjonen øker lineært som funksjon av $\Delta\sigma$, amplituden til det anomale EM-feltet ved mottakeren blir overestimert. Spesielt for $\sigma > 100$, der det sanne feltet begynner å bli mettet, øker feilen i Born kraftig som funksjon av økende kontrast.

SLN-approksimasjonen gir som forventet en stabil løsning ved økende kontrast, men underestimerer feltet betraktelig. For store, positive kontraster, er den relative feilen mellom SLN og FI rundt 100%. Figur 4.12(b) plotter opp feilen for hver prøve. Feilen mellom Born og FI for den største kontrasten er på hele 50196%. Merk SLN når $\sigma = 1$ S/m, SLN og FI gir tilnærmet samme estimat av feltet i denne mottakeren. Fra plottet i (a), er Born tilsynelatende et bedre estimat en SLN ved $\sigma \approx 100$ S/m, men av (b), gir både SLN og Born omtrent samme feil.

For σ verdier mellom 10^{-4} og 10^4 , er fasen til det anomale feltet vist i figur 4.13. FI-løsningen viser et faseskifte når konduktiviteten i reservoaret blir større enn konduktiviteten i bakgrunnsmodellen. For et reservoar med ledende egenskaper, vil den anomale fasen være positiv. Fasen beregnet med tilnærmingemetodene gir ingen informasjon om de ledende egenskapene til reservoaret.

4.4 Forovermodellering av 4D CSEM-data

En av fordelene med 4D-differansedata er delvis kanselleringen av feil i bakgrunnsfeltet. Der som det er feil i bakgrunnsmodellen under forovermodelleringseksperimenter, vil ikke disse ha like stor påvirkning for 4D-differansedata som for hver enkelt undersøkelse. De elektriske



Figur 4.13: Her er fasen ($^{\circ}$) til det anomale elektriske feltet i en mottaker 1700 meter fra kilden plottet mot $\Delta\sigma$.

feltendringene kan uttrykkes som det repeterte feltet minus basisfeltet (Bhuyian, 2009),

$$\mathbf{E}_x^{r-b}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_x^r(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_x^b(\mathbf{r}), \quad (4.6)$$

hvor indeksene b og r er hhv. basismålingen og repetert måling. $\mathbf{E}_x^{r-b}(\mathbf{r})$ kalles 4D-differansedata og representerer en 4D-anomali. Ligning (4.6) kan videre uttrykkes ved bakgrunnsfeltet og det anomale feltet,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x^{r-b}(\mathbf{r}) &= (\mathbf{E}_x^{(0)}(\mathbf{r}) + \Delta\mathbf{E}_x(\mathbf{r}))^r - (\mathbf{E}_x^{(0)}(\mathbf{r}) + \Delta\mathbf{E}_x(\mathbf{r}))^b, \\ &= \Delta\mathbf{E}_x^r(\mathbf{r}) - \Delta\mathbf{E}_x^b(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dette viser kanselleringen av bakgrunnsfeltet i $\mathbf{E}_x^{r-b}(\mathbf{r})$, slik at differansedataene kun gjenspeiler endringene i det anomale elektriske feltet. Ved inversjon av 4D-differansedata beregnes konduktivitetsendringen i reservoaret i forhold til basisundersøkelsen,

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^{r-b}(\mathbf{r}) &= \Delta\sigma^r(\mathbf{r}) - \Delta\sigma^b(\mathbf{r}), \\ &= (\sigma^r(\mathbf{r}) - \sigma^{(0)}(\mathbf{r})) - (\sigma^b(\mathbf{r}) - \sigma^{(0)}(\mathbf{r})), \\ &= \sigma^r(\mathbf{r}) - \sigma^b(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

I begynnelsen av HC-produksjon (vanninjeksjon) vil 4D-anomalien være sterk. Dette skyldes den raske responsen i de effektive konduktivitetssegenskapene til en bergart ved vanninjeksjon, som tidligere vist i figur 2.1. Metningsendringene og 4D-anomalien vil likevel øke over tid, noe som kommer av den sterke effekten til de laterale bevegelsene av porevæskene (Lien og Mannseth, 2008). Dersom dimensjonene til en udrenert del av et reservoar er lik inntrengningsdypet

til EM-signalet, kan denne isolerte delen oppdages på 4D-anomalien (Bhuyian, 2009). Overvåking av små volum- og metningsendringer kan være en utfordring med tanke på oppløsning (Lien og Mannseth, 2008), og vanskeligst ved vertikale metningsendringer.

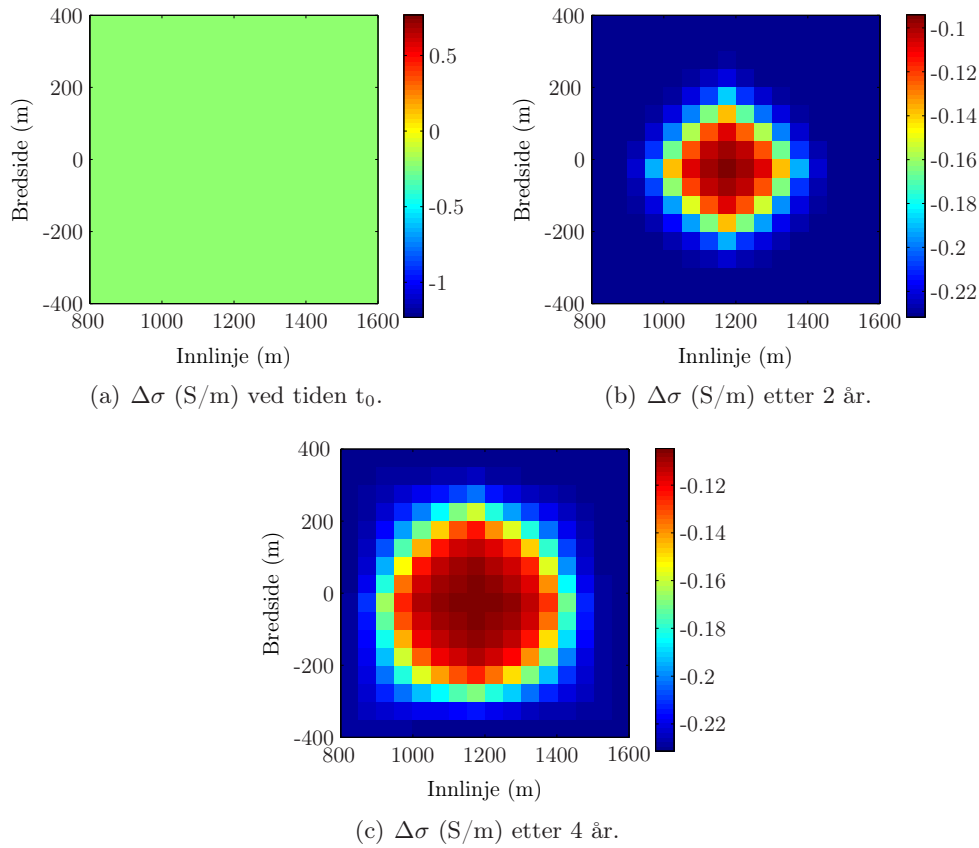
Lien og Mannseth (2008) undersøker sensitiviteten til marine CSEM-data for 4D-undersøkelser, og behandler blant annet modelleringsfeil, målingsfeil og instrumentasjonen som benyttes i slike undersøkelser. I følge Lien og Mannseth (2008) er flere feltkomponenter sensitive til strømningsavstander så små som 100 meter. Modelleringsfeil kan forstyrre kalkulerte signaler, mens tidsuavhengige feil som konduktivitesverdiene i bakgrunnsmodellen kanselleres delvis, og minsker feilen betraktelig. Feil i bakgrunnsmodellen vil påvirke beregninger av det anomale feltet ved SLN- og Born-tilnærmingerne, fordi approksimasjonene er funksjoner av bakgrunnsfeltet. Feilen vil likevel dempes noe, fordi det kun er endringen i konduktivitetskontrast som skaper en endring i feltet over tid.

4.4.1 Numerisk eksempel

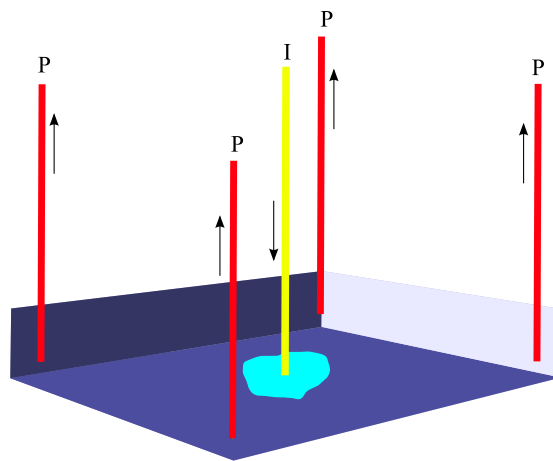
Konduktivitetskontrasten mellom reservoaret og bakgrunnsmodellen i hver gridcelle er vist i kartplan i figur 4.14. Her endres konduktivitetskontrasten mellom hver av de tre målingene ettersom vann injiseres i midten av reservoaret, mens hydrokarboner produseres fra fire brønner som skissert i figur 4.15.

Etter hvert som reservoaret produserer olje, vil kontrasten mellom bakgrunnsmodellen og reservoaret bli mindre. Over tid forventes derfor SLN- og Born-approksimasjonen å beregne mer nøyaktige felt. Amplitude og fase til det kalkulerte feltet for hver av de tre undersøkelsene er plottet som funksjon av offset i figur 4.16. De nye målingene skjer hvert andre år (t_1 og t_2), og differansedataene mellom $t_1 - t_0$, $t_2 - t_0$ og $t_2 - t_1$ er plottet i figur 4.17. For eksperimentene her er kilde og mottakerposisjoner like i basisundersøkelsen og de repeterte målingene.

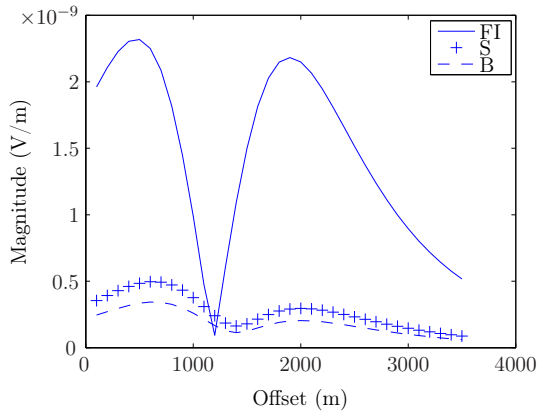
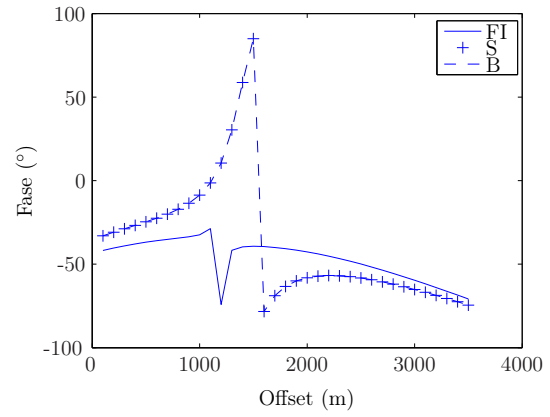
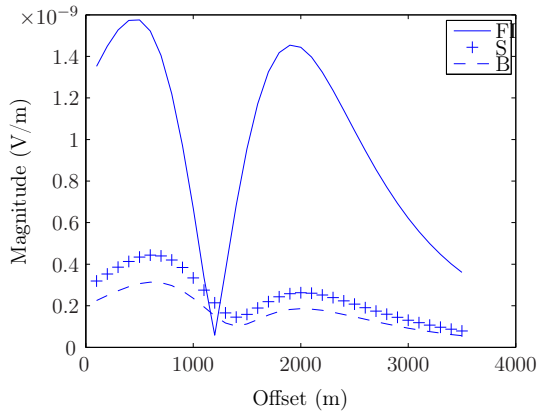
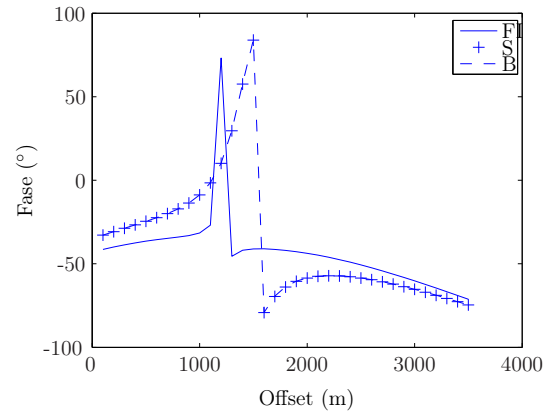
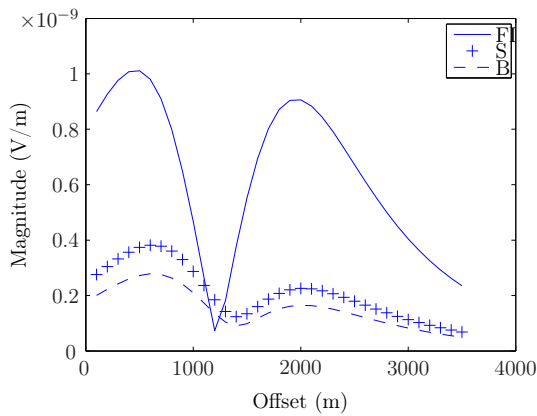
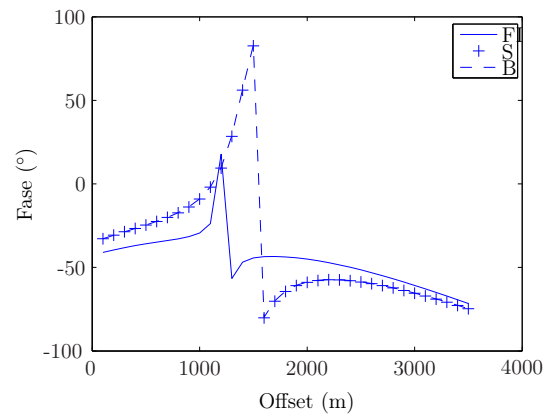
Plottene viser en bedring i feltberegningene over tid, når kontrasten mellom reservoaret og bakgrunnsmodellen minsker. Den relative feilen mellom tilnærmingerne og FI-løsningen beregnes ved ligning (2.70). Verdiene er vist i tabell 4.3, både for hver enkelt undersøkelse og for differansedataene. Fra tilnærmingerne av feltet før produksjon, til 4 år senere, minsker feilen for SLN-approksimasjonen hele 13% fra 84-71%. Feilen i Born minsker med 11%, fra 89-78%. Til tross for bedre beregninger av feltet, er likevel begge tilnærmingerne dårlige approksimasjoner for den modellen benyttet her. Feilen i differansedataene øker i forhold til feilen til det anomale feltet i t_0 , t_1 og t_2 . På grunn av nesten like fasetilnærminger i t_0 - t_2 , nulles endringen i fase med offset ut i differansedataene til approksimasjonene.



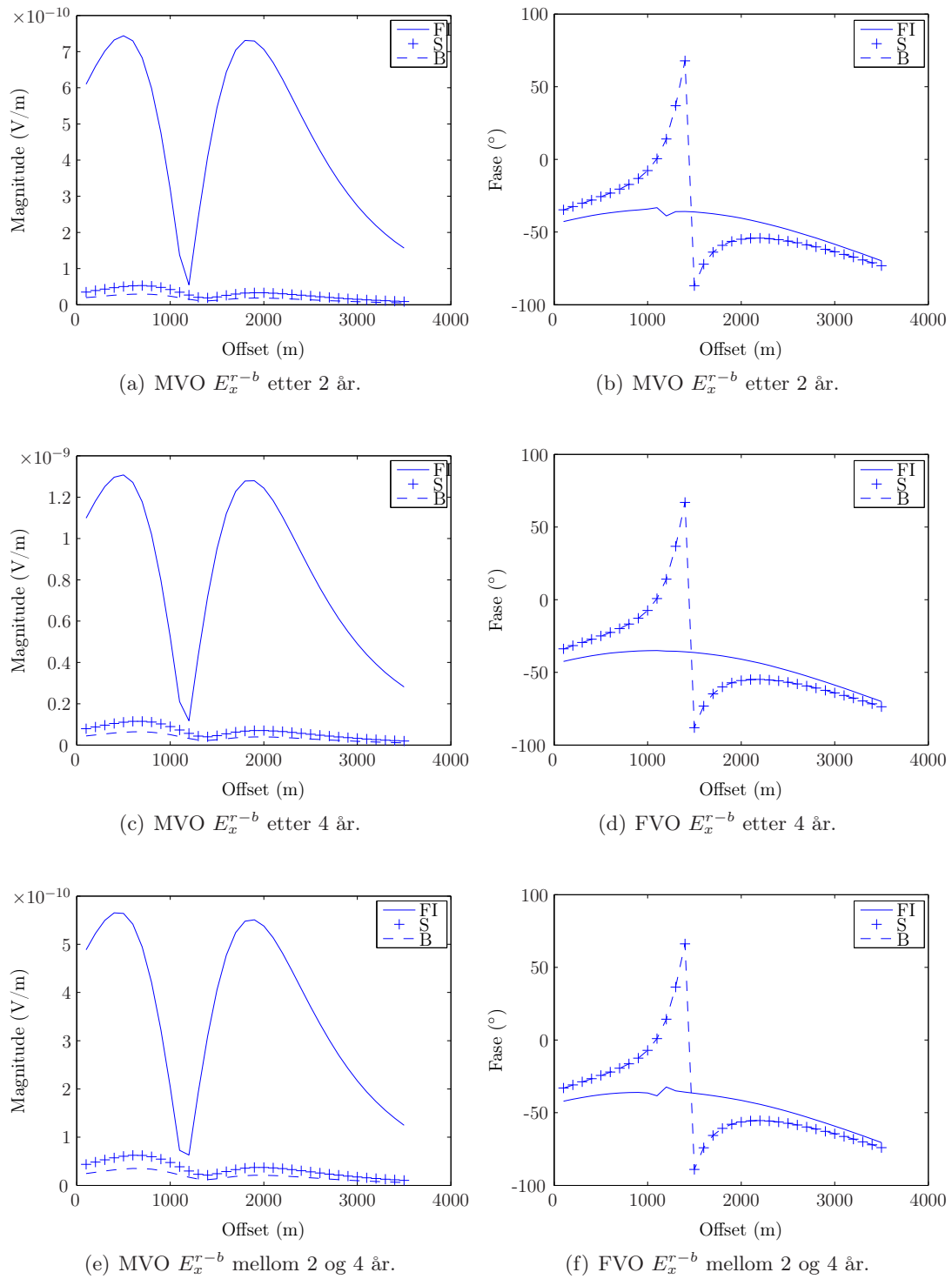
Figur 4.14: Viser konduktivitetskontrasten mellom reservoaret og bakgrunnsmodellen før og under produksjon i kartplan, hvor $\sigma^{(0)} = 0.25$ S/m og $\phi = 17\%$. Aksene viser offset (innlinje og bredside) mellom kilden og midtpunktene i gridcellene i kartplan.



Figur 4.15: Skisse over injeksjonsbrønnen (I - gul) i midten av reservoaret og de fire produsentene (P - rødt) i hvert av hjørnene.

(a) MVO ΔE_x ved t_0 (b) FVO ΔE_x ved t_0 (c) MVO ΔE_x ved t_1 (d) FVO ΔE_x ved t_1 (e) MVO ΔE_x ved t_2 (f) FVO ΔE_x ved t_2

Figur 4.16: MVO og FVO til det anomale elektriske feltet ΔE_x ved tiden t_0, t_1 og t_2 . Reservoaret fra 800-1600 meter offset. Her plottes FI —, SLN + og Born —.



Figur 4.17: Feltendringer mellom repeterte målinger og baseline undersøkelse mot offset. FI heltrukket linje, SLN + og Born --.

Reservoar modell	$\varepsilon_S(\%)$		$\varepsilon_B(\%)$	
	E_x	E_x^{r-b}	E_x	E_x^{r-b}
Før prod.	83.89		88.77	
Etter 2 år	78.70	94.64	84.76	96.99
Etter 4 år	70.91	93.46	78.42	96.31
Mellom 2 og 4 år		91.93		95.43

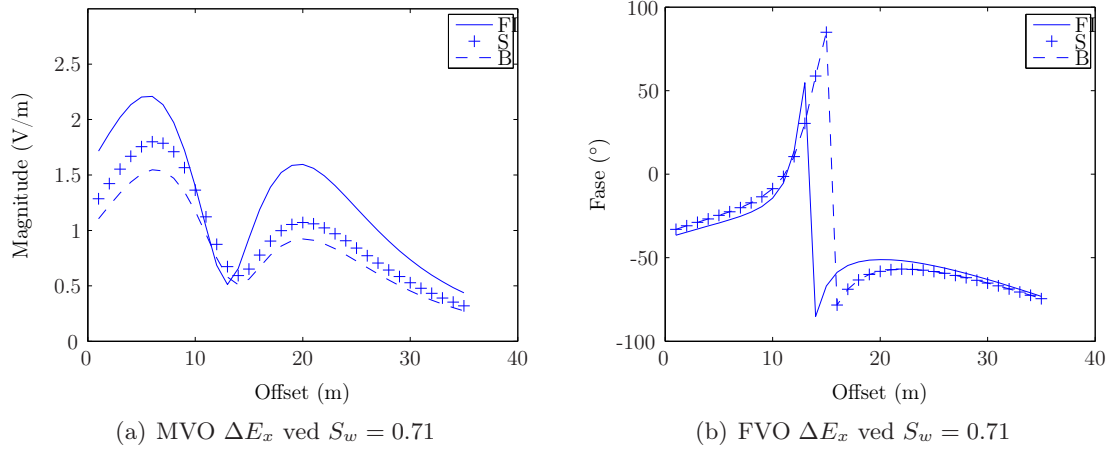
Tabell 4.3: Tabellen viser feilen for SLN- og Born-approksimasjonen i forhold til FI-løsningen for målingene før og under produksjon (etter 0, 2, 4 år), feilen i differansedataene i forhold til basismålingen, og i endringen mellom to siste undersøkelsene.

4.5 Oppsummering

Før de numeriske eksperimentene ble undersøkt, var motivasjonen å vise en enkel tilnærmingsmetode til det elektromagnetiske feltet. SLN er tidligere vist å være god over flere størrelsesorden av kontraster for lave frekvenser og små volum (Habashy et al., 1993), og er i motsetning til Born-approksimasjonen stabil for store konduktivitetskontraster mellom det anomale volumet og bakgrunnsmodellen.

Eksperimentene for varierende konduktivitet viser hvordan Born-metoden beregner EM-feltet lineært ved økende $\Delta\sigma$, mens SLN modellerer oppførselen til $\Delta\mathbf{E}$ med hensyn til de elektriske konduktivitetsendringene. Til tross for stabiliteten i SLN, er ikke approksimasjonen like god som forventet. Den underestimerer det elektriske feltet på samme måte som Born, og gir ikke en god nok tilnærming for reservoarmodellen og de kontrastene undersøkt her. Dette gjelder både for dataene i t_0 , t_1 og t_2 , og differansedataene. Selv etter 4 år med produksjon, er konduktivitetskontrasten i reservoaret for stor til å kunne bruke SLN-metoden til forovermodellering av et troverdig elektromagnetisk felt.

I et forsøk på å finne en realistisk konduktivitetskontrast der SLN- og Born-approksimasjonen fungerer, modelleres feltet for det samme reservoaret med konstant vannmetning $S_w = 71\%$, som er den høyeste vannmetning etter 4 år. På denne måten tas det hensyn til HC-rester i reservoaret etter produksjon. I dette tilfellet er $\sigma = 0.1453$ S/m, som fører til en kontrast på -0.1047 S/m. Amplitude og fase verdiene er plottet i 4.18(a) og (b). Både Born- og SLN-approksimasjonene er for dette tilfellet gode approksimasjoner, og gir gode beregninger både av fasen og amplituden til det elektromagnetiske feltet sammenlignet med de tidligere undersøkelsene. L_2 norm feilen til feltet beregnet ved SLN og Born, sammenlignet med FI, er hhv 27.62% og 36.35%. Tilnærmingene blir bedre for mindre kontraster, og dette eksperimentet illustrerer hvor mye vann reservoaret må inneholde for at tilnærmingsmetodene skal være



Figur 4.18: Plotter magnitude (a) og fase (b) som funksjon av offset, for et reservoar med $S_w = 70\%$. Kontrasten mellom bakgrunnsmodellen og reservoaret er -0.1453 S/m .

gyldige.

Ved å endre parameterene i Archies lov (2.10), kan konduktiviteten i reservoaret øke raskere og kontrasten mellom reservoaret og bakgrunnsmodellen bli mindre. For eksempel vil konstantene m, n og porøsiteten ϕ variere for ulike reservoar. Det er også mulig å injisere vann med høyere konduktivitet, for å oppnå en lavere konduktivitetskontrast tidligere i produksjonsfasen, slik at SLN blir en god tilnærming av feltet.

Kapittel 5

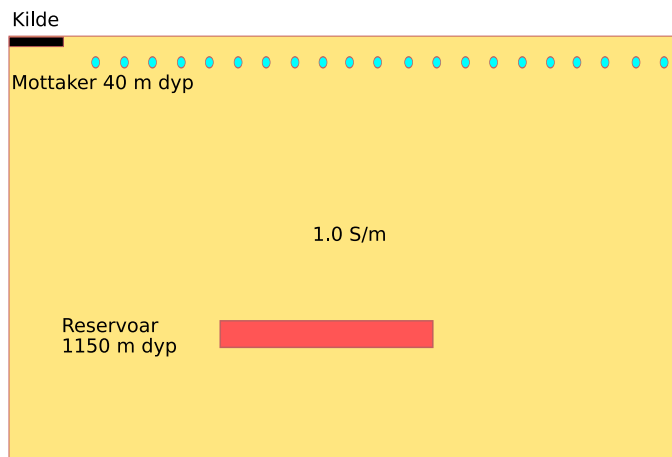
Inversjon av 3D og 4D CSEM-data

I dette kapitlet utføres syntetiske eksperimenter med inversjon av 3D og 4D CSEM. I kapittel 4 ble det vist at forovermodellering av det anomale elektriske feltet ved SLN- og Born-approksimasjonen er unøyaktig for de konduktivitetskontrastene undersøkt for et reservoar i produksjon. I dette kapitlet undersøkes inversjon ved hjelp av de to metodene for samme reservoarmodell benyttet i kapittel 4, men med en forenklet homogen bakgrunnsmodell.

Inversjon med Born og SLN testes ut på Born- og SLN-forovermodellerte data (videre kalt Born-Born, SLN-SLN og SLN-Born), både for enkelte tidssted under produksjon og på 4D-differansedata. 4D-anomaliene beregnes over små kontraster og volum, noe som taler til fordel for tilnærmingene og gir motivasjon til å teste gyldigheten til tilnærmingen i 4D-sammenhenger. Ved Born-inversjon av SLN-forovermodellerte data, undersøkes stabiliteten til inversjonsmetoden med å introdusere modellfeil.

5.1 Modell

For forovermodellering og inversjon av det anomale elektriske feltet, diskretiseres integralligningene slik at feltet $\mathbf{d} = \Delta \mathbf{E}$ kan beregnes ved ligning (2.80) for Born-approksimasjonen og (2.81) for SLN. Konduktiviteten i bakgrunnsmodellen er $\sigma^{(0)} = 1$ S/m, som skissert i figur 5.1, ellers benyttes de samme parametrene og reservoarmodellen som i kapittel 4 i tabell 4.1. Med 455 mottakere, der de tre feltkomponentene til det elektriske feltet registreres, og 256 gridceller i reservoaret, har det inverse problemet har flere datapunkt enn modellparametre, $M > N$. Inversjonen må løses ved å benytte normalligningene i ligning (3.9). For modellen benyttet har $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ små singulære verdier med betingelsestall $\kappa \approx 10^{18}$. Det er derfor viktig med regularisering for å få en mer stabil løsning med hensyn til støy i dataene. Forovermodel-



Figur 5.1: Skisse over modellen benyttet til forovermodellering og inversjon av det elektriske feltet. Kilde, mottakere og reservoar er illustrert i offset-dyp.

lering og inversjon av dataene i dette kapittelet gjøres i matlabprogrammene **modellering.m** og **inversjon.m** vedlagt i tillegg A

5.2 Syntetiske eksempel med inversjon av 3D CSEM-data

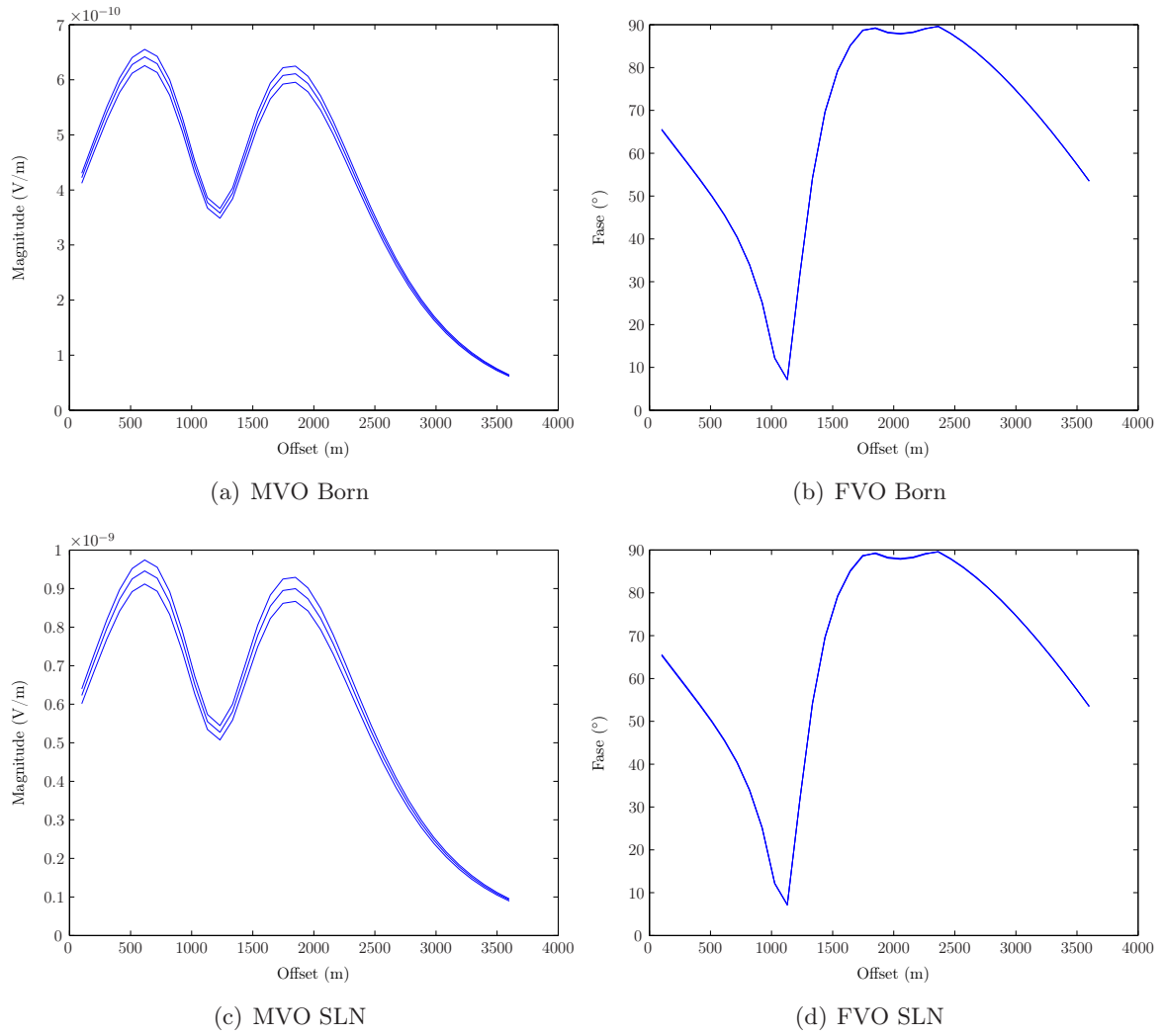
For hver av de tre CSEM-undersøkelsene før og under produksjon, samles det inn data som avhenger av konduktiviteten i reservoaret. Over tid vil kontrasten mellom reservoaret og bakgrunnsmodellen minske og gjør Born- og SLN-tilnærmingen mer troverdig over tid. På bekostning av mindre kontrast vil det anomale feltet blir svakere, noe som minsker nøyaktigheten i feltberegningene. Figur 5.2 viser magnituden og fasen plottet mot offset ved de tre tidspunktene generert med Born (a)-(b) og SLN (c)-(d).

Det legges til prosentvis støy på real- og imaginærdelen i alle datapunktene,

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{G}\mathbf{m}_{\text{sann}} + \boldsymbol{\varepsilon}, \\ &= \mathbf{d}_{\text{sann}} + \eta \mathbf{d}_{\text{sann}} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.1)$$

hvor η er støy i prosent og \mathbf{r} er en $M \times 1$ vektor med tilfeldige normalfordelte tall, $N(0,1)$, slik at standardavviket i feilen til dataene er $\eta \mathbf{d}_{\text{sann}}$.

Før produksjon finnes den estimerte løsningen ved TV-regularisering (avsnitt 3.4), med konstant konduktivitet i reservoaret. For å beregne løsningen benyttes MATLAB-funksjonen **pptsvds** ('Piecewise polynomial truncated SVD') (Hansen, 2009), hvor inndata er \mathbf{G} og \mathbf{L} matrisene, datavektoren \mathbf{d} og en konstanten k som forteller antall diskontinuiteter algoritmen



Figur 5.2: Magnitude og fase plottet mot offset for den midterste mottakerrekken. Plottene viser data samlet inn før- og etter 2 og 4 år med produksjon, generert ved (a)-(b) Born og (c)-(d) SLN.

skal lete etter i modellen. Løsningen vil i teorien bestå av k konstante segmenter separert med $k - 1$ diskontinuiteter.

Etter 2 og 4 år er det en glatt overgang i konduktivitet mellom gridcellene, inversjonen av dataene beregnes ved nulte ordens Tikhonov regularisering (avsnitt 3.3). Ved kjent støyfordeling, er den estimerte modellen en vektet, dempet, minste kvadraters løsning,

$$\mathbf{m}_\alpha = (\mathbf{G}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{G} + \alpha^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{d} = \mathbf{G}_\alpha \mathbf{d}. \quad (5.2)$$

Regulariseringsparameteren α finnes ved GCV metoden eller ved prøving og feiling til det oppnås best mulig match mellom den estimerte- og den sanne modellen. I de ulike eksemplene legges det til mellom 1 og 10% støy i dataene. Dette vil gi en indikasjon på mengden datastøy som tåles før inversjonen feiler. Etter inversjon måles feilen i den estimerte modellen,

$$\varepsilon_m = \frac{\|\mathbf{m}_{\text{sann}} - \mathbf{m}_{\text{est}}\|_2}{\|\mathbf{m}_{\text{sann}}\|_2}. \quad (5.3)$$

Inversjon av dataene for å finne konduktivitetsendringer i reservoaret ved bruk av SLN-approksimasjonen må utføres i to steg. Først gjøres en lineær inversjon av dataene for å estimere t -verdiene i hver gridcelle. Deretter finnes endringen i konduktivitet ved en ikke-lineær inversjon,

$$\Delta\sigma = \frac{-3\sigma^{(0)}t}{t - 3\sigma^{(0)}}. \quad (5.4)$$

SLN er lineær i t (lokalisert), men det er ikke mulig å finne $\Delta\sigma$ direkte fra integralligningen. Enkelheten i beregningene beholdes, men det vil ta noe lenger tid å beregne SLN-løsningen relativ Born.

Resultater Born- og SLN-inversjon

Inversjonsresultatene ved Born-Born-metoden er vist i figur 5.4 og SLN-SLN-metoden i figur 5.5. Ved støy tilstede i dataene, er det vanskelig å estimere en god modell fra dataene før produksjonsstart. Figurene viser tydelig dårligere inversjonsresultater ettersom støyinnholdet øker, men viser noe bedre estimer for SLN-SLN sammenlignet med Born-Born. Merk det store intervallet i fargeskalaen i figurene før produksjon, $\Delta\sigma$ verdiene er mellom -0.5 og -1.5 S/m, hvor $\Delta\sigma_{\text{sann}} = -0.982$.

SLN-SLN og Born-Born gir omtrent samme inversjonsresultat av dataene etter 2 og 4 år. Etter 2 år underestimeres konduktivitetskontrastene, men med lite støy i dataene klarer inversjonen å fange opp de laveste modellparameterne. Ved økende støy blir de estimerte modellene dårligere både med hensyn til oppløsning og riktige konduktivitetsverdier. Figur 5.3 plotter det dårlige

inversjonsresultatet til SLN-SLN og Born-Born fra dataene etter 2 år med 10% støy. Det er tydelig at de to metodene gir ganske like inversjonsresultat.

Etter 4 år blir inversjonsresultatene bedre. De estimerte modellparameterne finner de riktige konduktivitetskontrastene mellom bakgunnsmodellen og reservoaret, med unntak av områdene med høyest kontrast (ut mot kanten av reservoaret). Her overestimeres $\Delta\sigma$. Etterhvert som mer støy legges til dataene, blir estimeringen av de høyeste $\Delta\sigma$ verdiene dårligere og estimatene smøres noe ut.

Når dataene genereres ved SLN, benyttes $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{t}$, hvor \mathbf{t} er gitt i ligning (2.69). Ved å ta inversjon ved hjelp av Born, da vi benytter dataene modellert ved SLN, vil vi i realiteten kun finne tilbake til \mathbf{t} verdiene,

$$\mathbf{m}_{\text{est}} = \mathbf{t} = \mathbf{G}_\alpha \mathbf{d}. \quad (5.5)$$

Ved å bruke SLN-dataene som de sanne dataene, testes inversjon med Born for å undersøke gyldigheten til metoden ved disse konduktivitetskontrastene og stabiliteten med hensyn til modellfeil i inversjonen. Modellestimeringen etter 4 år, som gir det beste inversjonsresultatet, er plottene i figur 5.6 sammen med den sanne modellen. Med kun 1% datastøy svikter Born-approksimasjonen til å estimere riktige konduktivitetsverdier. Plottet viser tydelig et unøyaktig resultat når modellfeil og konduktivitetskontraster i modellen er av denne størrelsesordenen.

For de ulike numeriske eksemplene, beregnes feilen til modellestimatene ved ligning (5.3). Feilen er gitt i tabell 5.1 sammen med verdien av objektivfunksjonen for løsningene beregnet ved vektete dempet minste kvadrater (5.2). Den forventede verdien til den estimerte løsningen skal være lik den forventede verdien til den sanne løsningen med noen standardavvik, vist i ligning (3.44) (Aster et al., 2005). I dette tilfellet er $M = 3 \cdot 455 = 1365$ og antall modellparametere $N = 256$, s.a.

$$\text{Exp}[f(\mathbf{m})] = M - N + \beta\sqrt{2(M - N)} \approx 1156, \quad (5.6)$$

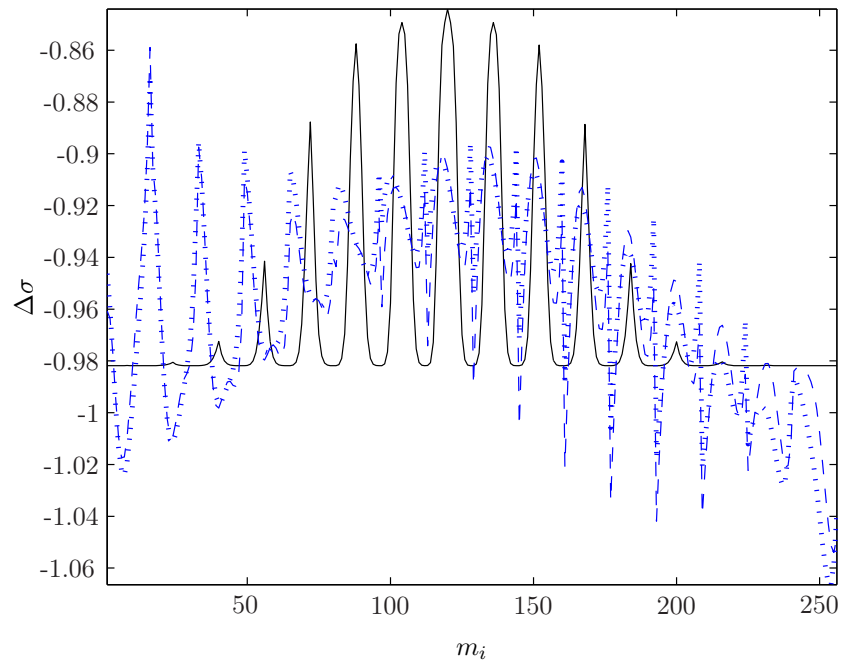
når $\beta = 1$. Alle inversjonsresultatene ligger innenfor noen standardavvik, β er av første orden $O(1)$.

5.2.1 Støyforplantning fra $t(\Delta\sigma)$ til $\Delta\sigma$

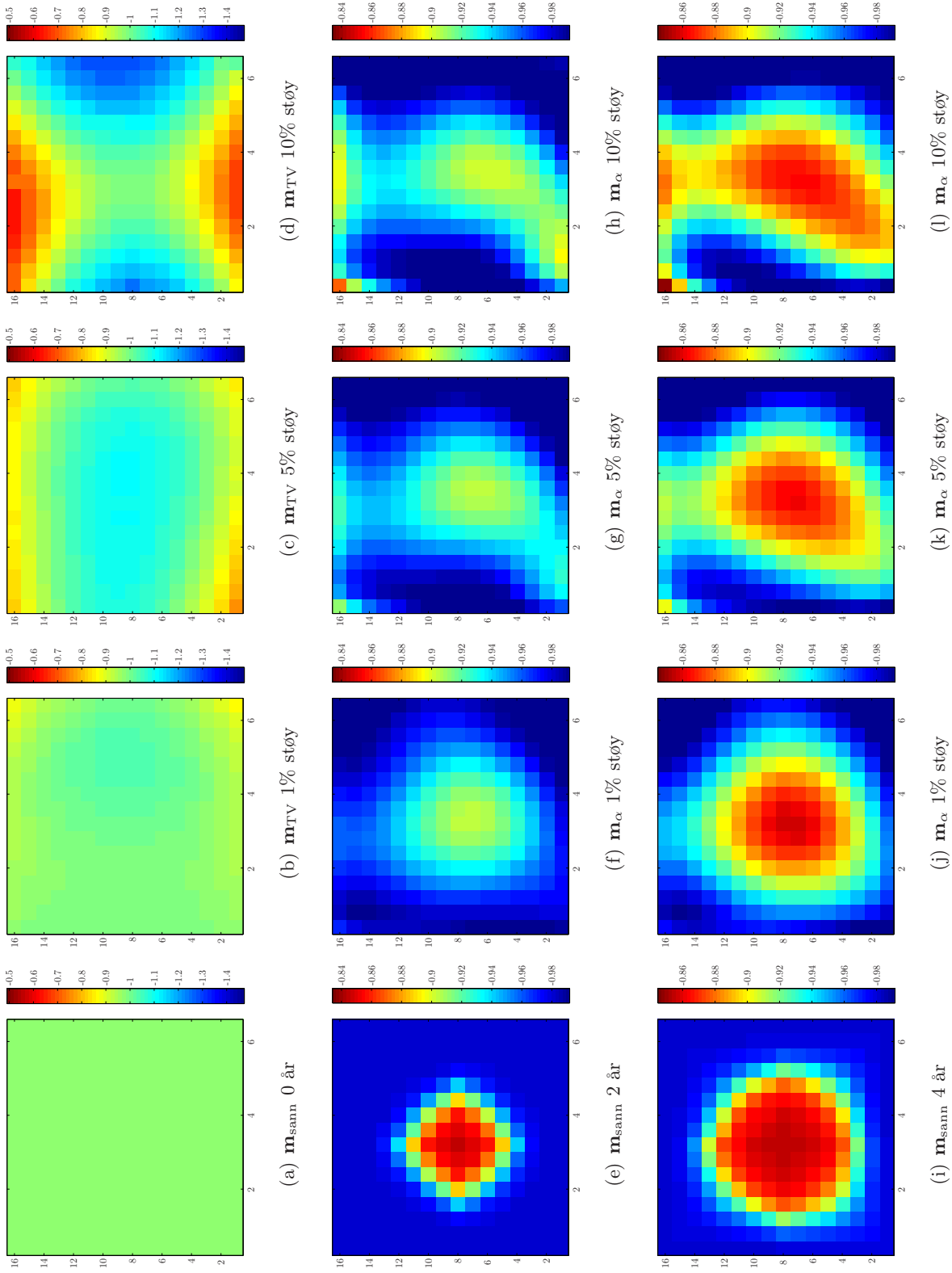
Feil i t -verdiene til gridcellene i reservoaret vil føre til feil i de estimerte konduktivitetskontrastene ved SLN-inversjon. For å teste hvordan støy i t vil forplante seg videre, utføres Monte Carlo simulering av t og $\Delta\sigma$ (matlabprogram **montecarlo** i tillegg A). Først undersøkes en t -verdi beregnet fra $\Delta\sigma = \langle \sigma - \sigma^{(0)} \rangle$ etter 4 år med produksjon. For 100.000 prøver med standardavvik på 0.01 og middelerdi $\mu_t = -1.3718$, blir standardavviket til konduktivitetskontrastene $\text{std}(\Delta\sigma) = 0.0047054$ og middelerdi $\mu_{\Delta\sigma} = -0.94133$. Histogram for de to

Tid (år)	Støy (%)	ε_{BB} (%)	$f(\Delta\sigma)$	ε_{SS} (%)	$f(\mathbf{t})$	ε_{SB} (%)	$f(\Delta\sigma)$
0	1	2.892		1.770		48.49	
2		2.300	1516	2.317	1477	47.44	1477
4		1.783	1308	1.725	1305	46.05	1305
0	5	8.694		4.682			
2		3.190	1451	2.844	1414		
4		2.976	1298	2.516	1295		
0	10	15.57		2.486			
2		4.174	1424	3.454	1388		
4		4.128	1295	3.310	1292		

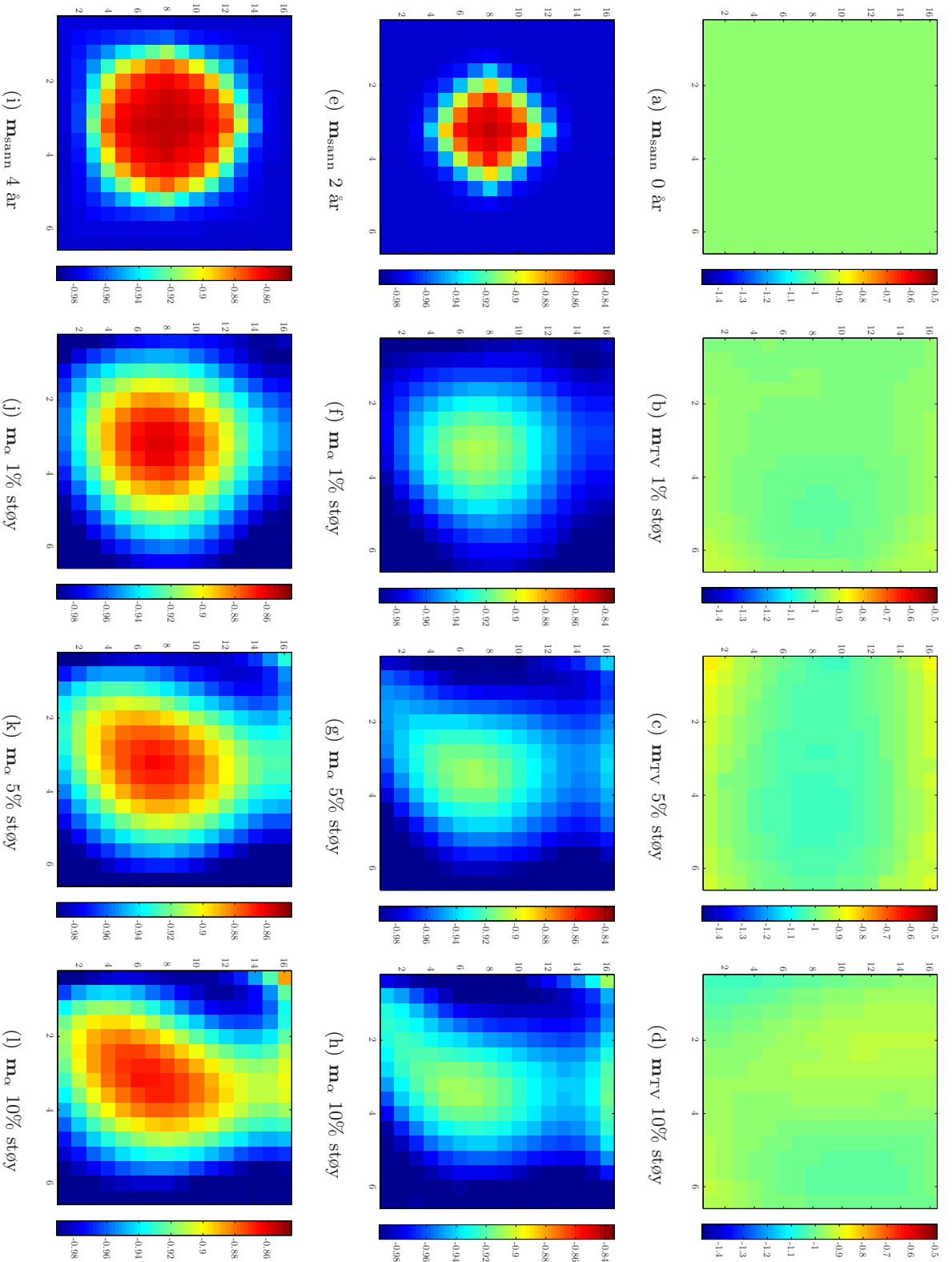
Tabell 5.1: Feil i den estimerte modellen og verdien til objektivfunksjonen for 3D CSEM-data ved Born-Born, SLN-SLN og SLN-Born.



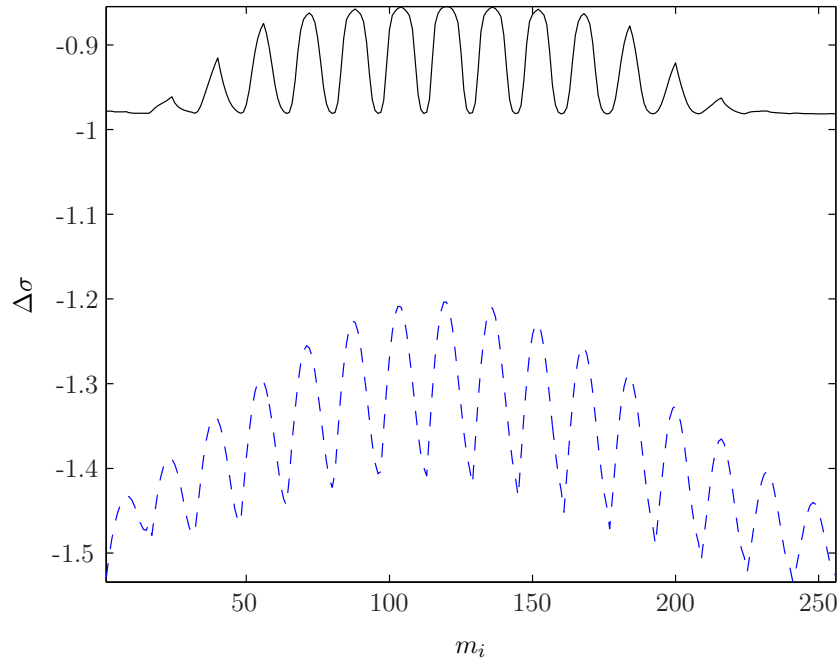
Figur 5.3: Plot av de estimerte modellparameterne ved Born og SLN etter 2 år. Den sanne modellen er plottet i svart heltrukket linje, SLN — og Born \cdots i blått.



Figur 5.4: Sann og estimert $\Delta\sigma$ (S/m) i reservoaret før og under produksjon, sett i kartplan. Forovermodellering og inversjon ved Born-metoden med 1, 5 og 10% datastøy. x og y akse gir gridcellene i reservoaret.



Figur 5.5: Samn og estimert $\Delta\sigma$ (S/m) i reservoaret før og under produksjon, sett i kartplan. Forovermodellering og inversjon ved SLN-metoden med 1, 5 og 10% datastøy. x og y akse gir gridcellene i reservoaret.



Figur 5.6: Plot av de estimerte modellparameterne ved Born-metoden av SLN-genererte data i t_2 .

Den sanne modellen er plottet i svart heltrukket linje Born — i blått.

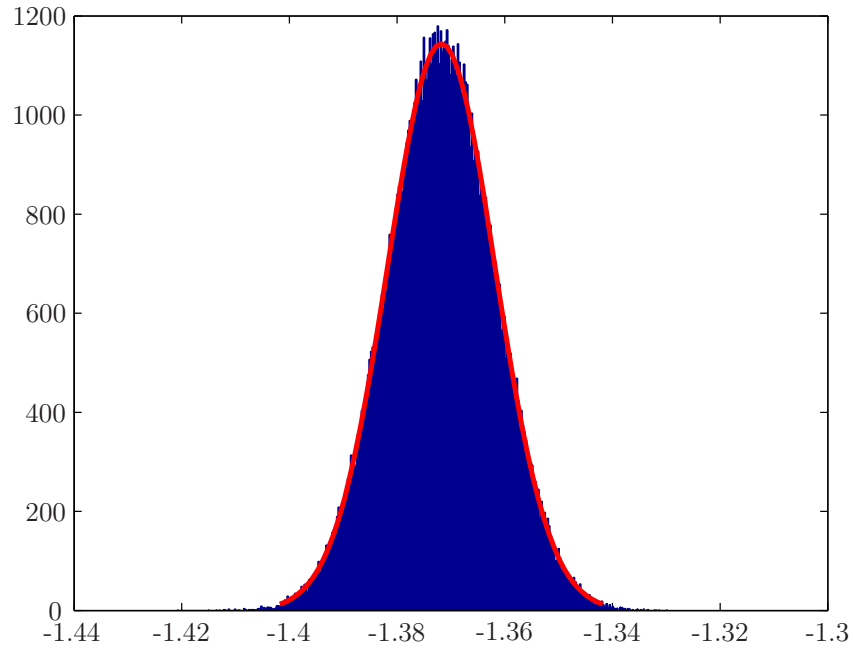
fordelingene er vist i figur 5.7, standardavviket minsker etter den ikke-lineære inversjonen fra t til $\Delta\sigma$.

Videre undersøkes t -verdien til den midterste reservoarcellen etter 4 år med produksjon, når det legges til 1% støy i det elektriske feltet. Feilen i \mathbf{t} verdiene beregnes fra kovariansmatrisen etter den lineære inversjonen ved ligning (3.18), hvor $\mathbf{A} = (\mathbf{G}_w^T \mathbf{G}_w + \alpha^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}_w^T$ og $\text{Cov}(\mathbf{d}) = \text{Cov}(\mathbf{d}_w) = \mathbf{I}_m$. Standardavviket til \mathbf{t} er,

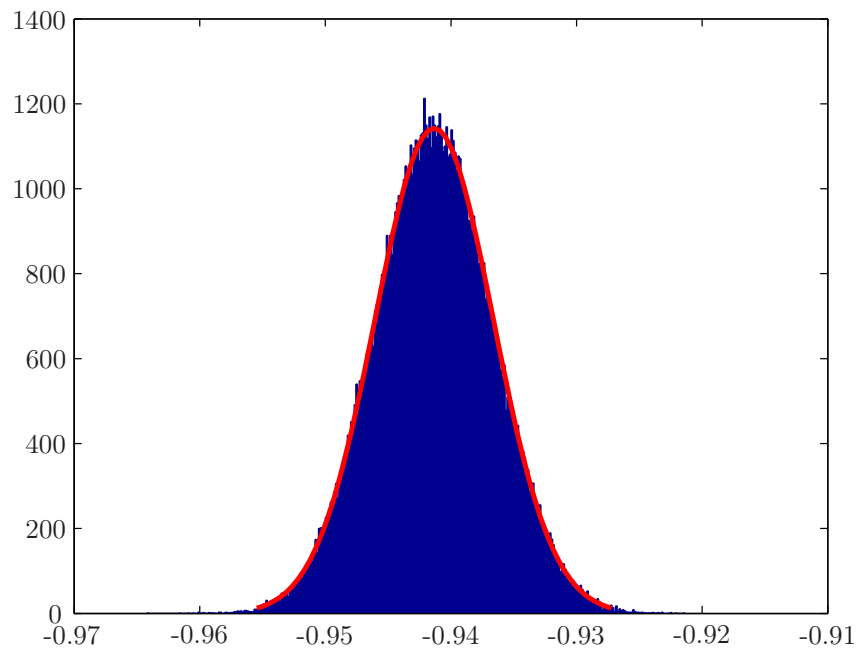
$$\text{std}(\mathbf{t}) = \sqrt{\text{diag}(\text{Cov}(\mathbf{t}))}. \quad (5.7)$$

Det undersøkes 10.000 prøver. Histogrammer av fordelingen til t og $\Delta\sigma$ er vist i figur 5.8. Standardavviket til den midterste gridcellen er $\text{std}(t) = 0.033422$ og middelværdi $\mu_t = -1.3991$. Modellverdien beregnet fra t har standardavvik $\text{std}(\Delta\sigma) = 0.015547$ og middelværdi $\mu_{\Delta\sigma} = -0.95402$.

Etter den ikke lineære inversjonen fra beregnede t -verdier til konduktivitetskontraster, minsker standardavviket i feilen for disse forsøkene. Dette kan forklare hvorfor SLN-approksimasjonen gir bedre inversjonsresultater, mindre feil i den estimerte modellen, i de syntetiske eksemplene sammenlignet med Born.

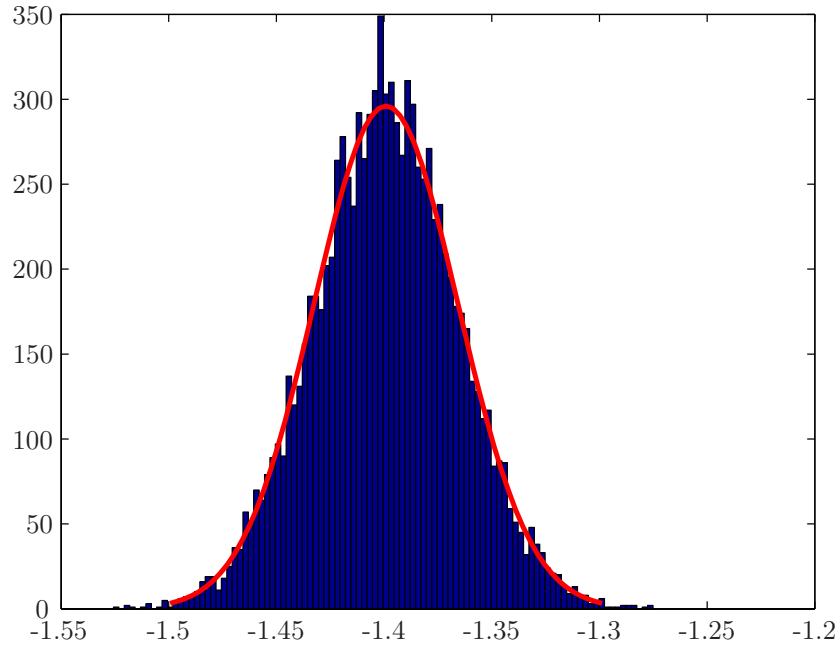
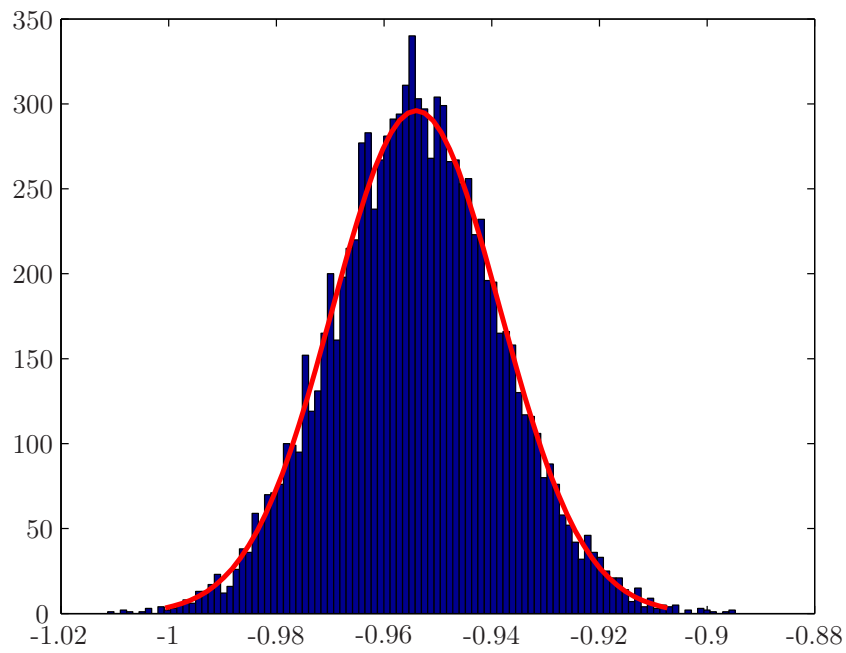


(a) Histogram over t -verdier med $\text{std}(t) = 0.0099$.

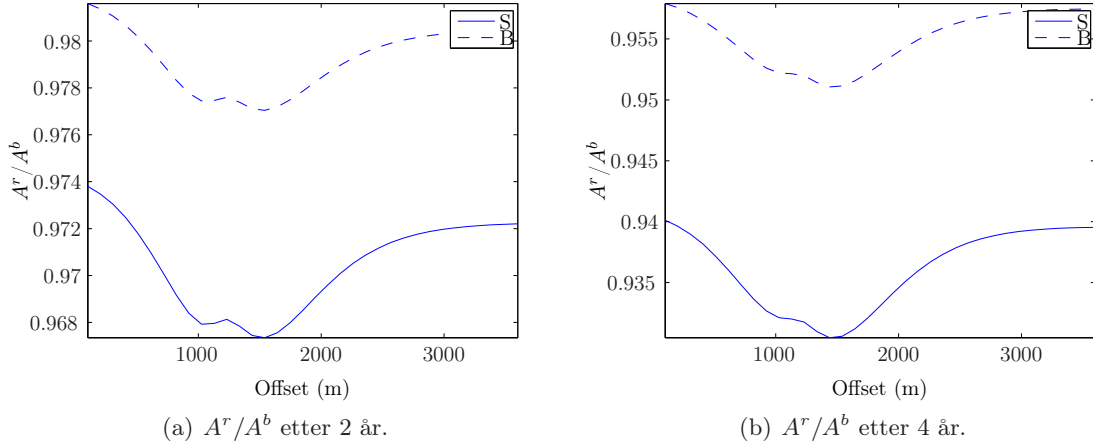


(b) Histogram over $\Delta\sigma$ verdier med $\text{std}(\Delta\sigma) = 0.0047$.

Figur 5.7: Histogram over feil i t -verdier med 1% standardavvik, og følgende feil i $\Delta\sigma$. Sann $\Delta\sigma = -0.941$ som for 3D undersøkelser.

(a) Histogram over t -verdier med $\text{std}(t) = 0.0334$.(b) Histogram over $\Delta\sigma$ verdier med $\text{std}(\Delta\sigma) = 0.0155$.

Figur 5.8: Historgam over (a) feil t -verdier i den midterste gridcellen. Standardavvik er beregnet fra kovariansmatrisen til \mathbf{t} etter inversjon av dataene samlet inn etter 4 år. Feil i den estimerte $\Delta\sigma$ fra t vises i (b).



Figur 5.9: Forholdet mellom amplitude til basisundersøkelsen og de repeterte målingene etter 2 (a) og 4 år (b). SLN er plottet i heltrukken (—) linje og Born stiplede (---).

5.3 Syntetiske eksempel med inversjon av 4D-differansedata

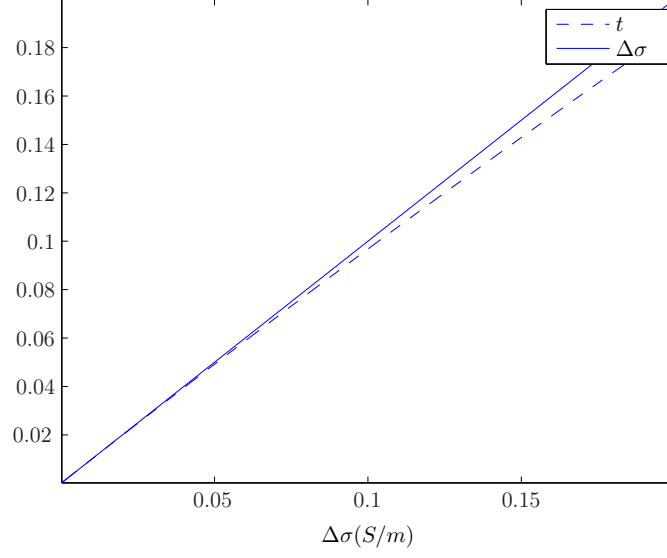
De modellerte dataene brukes til å finne endringen i konduktivitet ved inversjon av differanse-dataene $\mathbf{E}^{(r-b)}(r)$ gitt i ligning (4.6). Den største konduktivitetsendringen er etter 2 år. Dette skyldes at vannet ikke har fått tid å spre seg over like stort volum som etter 4 år. Kontrastene er noe lavere, men volumet det integreres over er større.

Zach et al. (2009) plotter opp de syntetiske 4D-dataene som forholdet mellom de repeterte målingene og basis dataene

$$\frac{A^r}{A^b} = \frac{\text{Etter produksjon}}{\text{Før produksjon}}. \quad (5.8)$$

Figur 5.9 viser amplitudforholdet i den midterste mottakerrekken etter (a) 2 og (b) 4 år. Det er en reduksjon i magnituden ved hver nye måling, med størst amplitudeendringene like over reservoaret (800 - 1600 meter offset). Forovermodellering ved SLN-metoden gir den største amplitude endringen over tid.

SLN-forovermodellerte data vil gi tilnærmet samme inversjonsresultater ved Born- og SLN-metoden når $\Delta\sigma$ og t har tilnærmet samme verdi. Reservoarmodellene benyttet i de numeriske eksemplene for 4D-analyser har konduktivitetskontraster i intervallet $7.66 \times 10^{-5} - 0.138$ S/m. Tilsvarende t -verdier er $2.29 \times 10^{-4} - 0.363$. For $\sigma^{(0)} = 1$ S/m er $t(\Delta\sigma)$ plottet opp i figur 5.10 når $\Delta\sigma \in (0, 0.2)$. I de tilfellene der t og $\Delta\sigma$ er like, vil metodene generere de samme dataene, men ved inversjon for å finne riktig konduktivitetskontrast, vil metodene likevel gi ulike estimat.



Figur 5.10: Plottet viser området der t har tilnærmet samme verdi som $\Delta\sigma$ når $\sigma^{(0)} = 1$ S/m.

5.3.1 Støy i dataene fra basis- og repeterte undersøkelser

Før inversjon av dataene, legges det på uavhengig og normalfordelt støy (5.1) på dataene fra hver undersøkelse. Differansen mellom de innsamlede dataene kan skrives,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{\mathbf{r-b}} &= \mathbf{d}^{\mathbf{sr}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{r}} - \mathbf{d}^{\mathbf{sb}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{d}^{\mathbf{sr}} - \mathbf{d}^{\mathbf{sb}} + \eta (\mathbf{d}^{\mathbf{sr}} \mathbf{r}^{\mathbf{r}} - \mathbf{d}^{\mathbf{sb}} \mathbf{r}^{\mathbf{b}}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

når $\boldsymbol{\varepsilon} = \eta \mathbf{d}_s \mathbf{r}$. Kun dersom vektorene $\mathbf{r}^{\mathbf{r}}$ og $\mathbf{r}^{\mathbf{b}}$ er like, vil

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^{\mathbf{sr}} - \mathbf{d}^{\mathbf{sb}} + \eta (\mathbf{d}^{\mathbf{sr}} - \mathbf{d}^{\mathbf{sb}}) \mathbf{r}, \quad (5.10)$$

med standardavvik

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta (\mathbf{d}^{\mathbf{sr}} - \mathbf{d}^{\mathbf{sb}}). \quad (5.11)$$

For de numeriske inversjonseksemplene med 4D CSEM-data finnes konduktivitetsendringen ved dempet minste kvadrater (3.28) uten vekting, fordi det er vanskelig å finne riktig standardavvik. For å finne regulariseringsparameteren, testes L-kurve prinsippet og GCV-metoden ut for å se om de gir like α -verdier. Resultatene er tilfredsstillende like og videre benyttes hovedsakelig GCV-metoden. Den inverterte matrisen etter regularisering har et mye lavere betingelsestall $K \approx 10^3 \ll 10^{18}$, stabiliteten i løsningen øker.

Metode	Data	ε_m (%) ved 1% støy	ε_m (%) ved 5% støy
Born-Born	$t_1 - t_0$	76.99	152.52
	$t_2 - t_0$	48.31	103.25
SLN-SLN	$t_1 - t_0$	124.66	224.61
	$t_2 - t_0$	145.39	237.33
SLN-Born	$t_1 - t_0$	122.20	221.94
	$t_2 - t_0$	133.10	223.76

Tabell 5.2: Feil i løsningen til de estimerte modellene for ulike mengder datastøy i basis og repetert undersøkelse.

Born-forovermodellering og inversjon

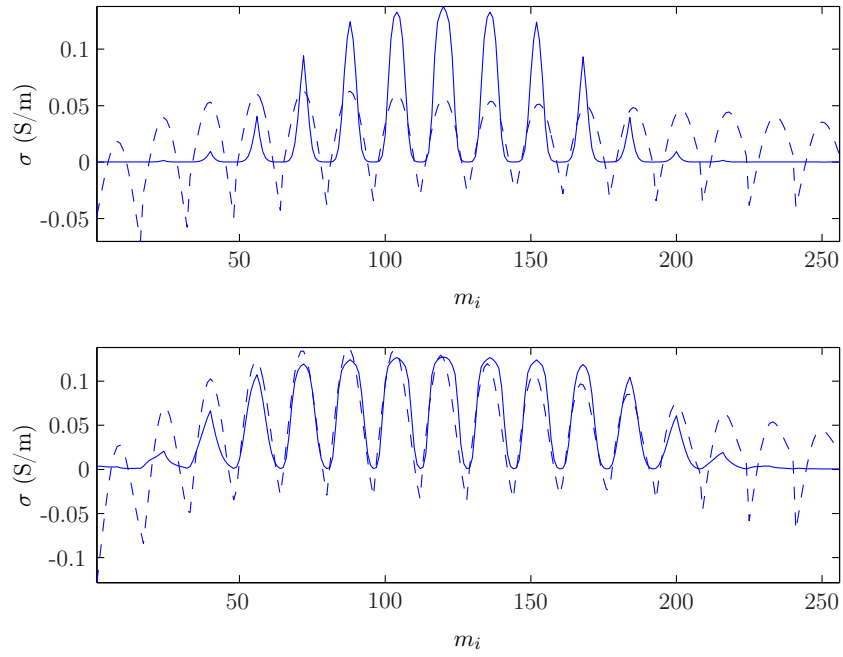
Geometrien i undersøkelsen er den samme som for basisundersøkelsen, slik at det ikke er noen feil i mottaker- og kilde posisjon. Det legges på 1 og 5 % støy på hver datakomponent. Plot av alle modellparameterne med sann og estimert løsning er vist i figur 5.11 og 5.12. Med 1% datastøy, blir inversjonsresultatet bra for differansedataene mellom basisundersøkelsen og dataene samlet inn etter 4 år. For 4D-differansedata etter 2 år med produksjon, blir inversjonen dårlig selv for lite støy. Ved å øke datastøyen økes feilen i de estimerte modellene og inversjonsresultatet blir dårlig også for differansedataene etter 4 år.

SLN-forovermodellering - inversjon med SLN og Born

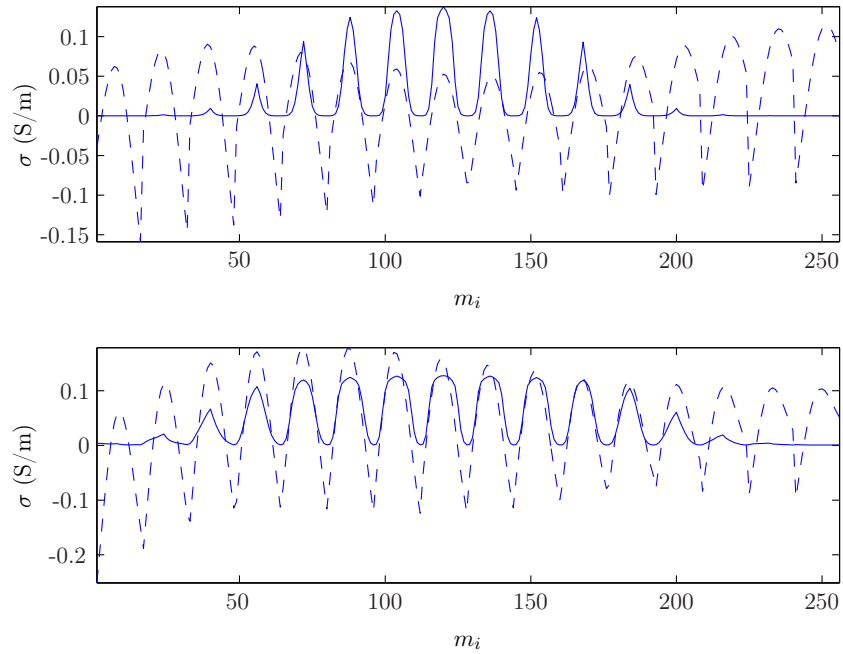
Inversjon ved bruk av Born-approksimasjonen beregner konduktivitetsendringene i hver grid-celle direkte. Det er derfor interessant å undersøke inversjon av SLN-genererte data med Born-metoden, for å minske beregningstiden og forenkle inversjonsprosedyren.

På grunn av likheten mellom t verdiene og $\Delta\sigma$, vil inversjon av SLN-genererte data for små kontaster med Born-metoden fungere for 4D-differansedata. Dataene er $t = \Delta\sigma^{r-b}\Gamma_0$, med sann gjennomsnittsverdien $|\langle\Gamma_0\rangle| = 0.0130$ etter 2 år, og $|\langle\Gamma_0\rangle| = 0.0286$ etter 4 år. Born-metoden vil ved inversjon beregne en noe lavere konduktivitetsverdi sammenlignet med SLN, mest merkbar etter 2 år, der $\langle\Gamma_0\rangle$ er lavest.

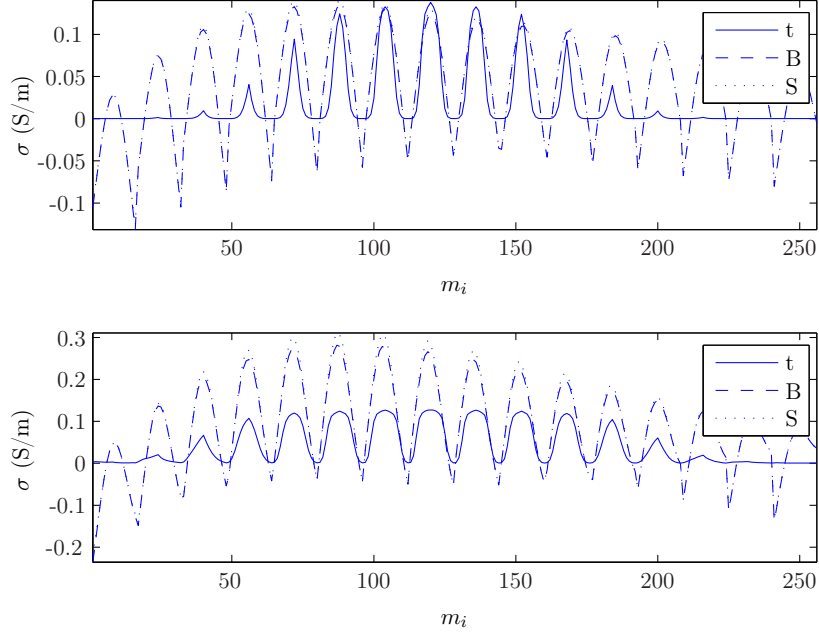
Her undersøkes både SLN- og Born-inversjon med 1 og 5 % støy i dataene fra basisundersøkelsen og de repeterte målingene. Plot av alle modellparameterne med sann og estimert løsning er vist i figur 5.13 og 5.14. De to inversjonene beregner nokså like modellparametere, SLN som forventet noe høyere konduktivitetsverdier.



Figur 5.11: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år med 1% datastøy i basis og repetert undersøkelse (Born-Born).



Figur 5.12: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år med 5% datastøy i basis og repetert undersøkelse (Born-Born).



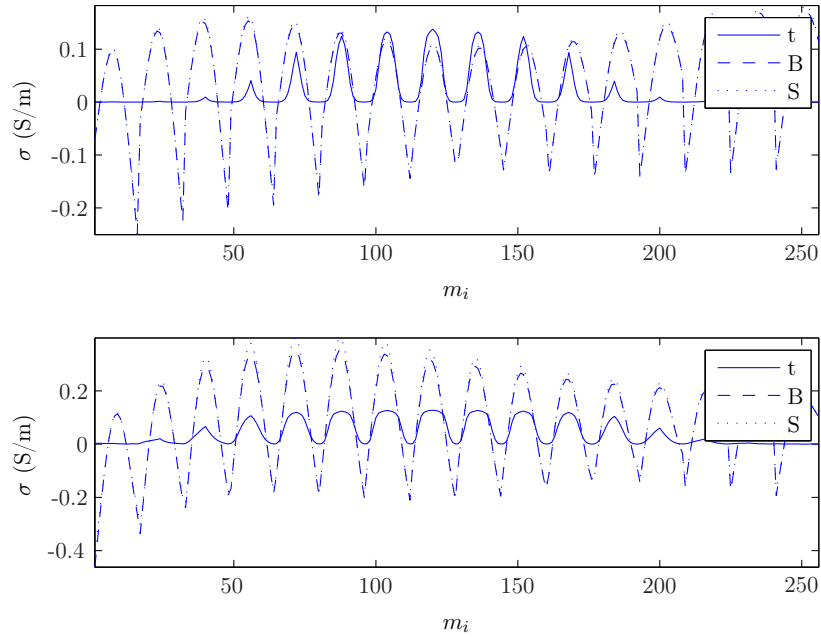
Figur 5.13: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år med 1% datastøy i basis og repetert undersøkelse (SLN-SLN og SLN-Born).

Med 1% datastøy blir inversjonen brukbar etter 2 år, men etter 4 år overestimeres de største konduktivitetsverdiene kraftig. For begge tidsstegene blir de estimerte modellparameterne utsmørt og det blir ikke mulig å observere vannfronten fra den inverterte løsningen. For 5% datastøy blir inversjonsresultatene dårlige både etter 2 og 4 år. Konduktivitetsverdiene er av riktig størrelsesorden, men det blir umulig å finne vannfronten og å tolke dreneringsmønster i reservoaret. Tabell 5.2 viser L_2 -norm feilen i de estimerte løsningene til Born-Born, SLN-SLN og SLN-Born-metodene. SLN-Born gir mindre feil enn SLN-SLN, spesielt merkbart etter 4 år.

5.3.2 “Stacke” data

Inversjonsresultatene ble dårlige med 1% støy i \mathbf{d}^r og \mathbf{d}^b i ligning (5.9). Lavere støynivå kan oppnås med “stacking” av data. Ved å samle inn mer data og legge dem sammen, vil tilfeldig støy kanselleres og signal-støy forholdet vil øke. Figur 5.15 plottet amplituden i den midterste mottakerrekken uten “stacking” for å vise hvordan støy påvirker differansedataene. Plottet viser differansedata uten og med (a) 1% og (b) 10% støy. Ved “stacking” av data med 10% støy, er samme type plot vist i figur 5.16 med 50, 100, 200 og 500 prøver og .

Dersom det er 1% støy i dataene uten “stacking”, er feilen i L_1 -norm beregnet med ligning (2.70) til differansedataene i t_1 37.71%. For 10% støy er feilen 377.09%. Det første tilfellet

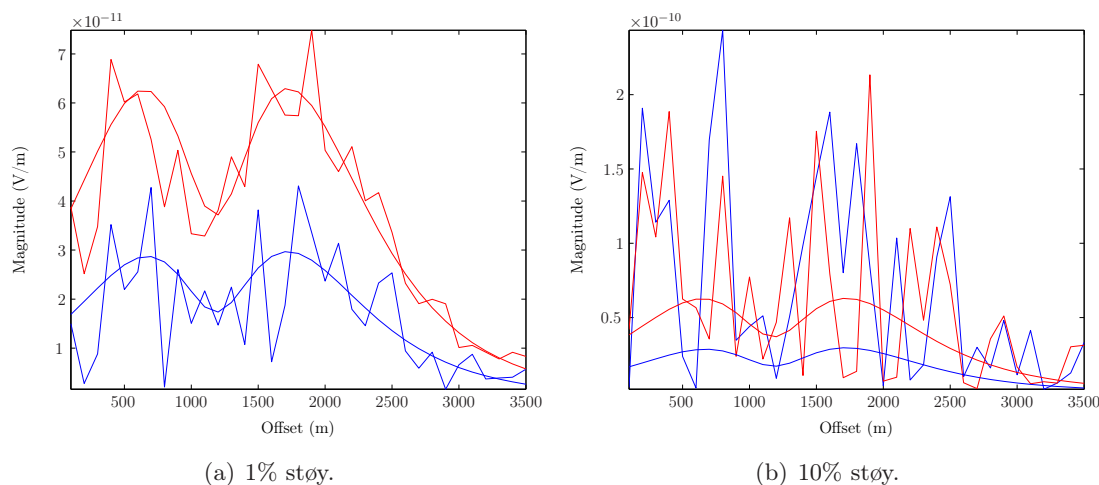


Figur 5.14: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år med 5% datastøy i basis og repetert undersøkelse (SLN-SLN og SLN-Born).

gir ok inversjonsresultater, men det er ønskelig i øke signal-støy forholdet enda mer. Med “stacking” av 50 dataprøver er feilen til differansedataene, med 10% feil i hver prøve, 53.61%. For 100 prøver er feilen 36.59%, 200 prøver gir 26.08% og 500 gir 16.76% feil. Figur 5.17 plotter feilen i differansedataene ved 10% støy som funksjon av antall stackede prøver. Det er en tydelig reduksjon i feil med økende datamengde.

5.3.3 Numerisk eksempel med støy på 4D-differansedata

Inversjon er ikke lovende, med tanke på hvor lite støy i hvert datasett som skal til for å ødelegge inversjonsresultatene av 4D-anomaliene. Som vist over kan støyen i dataene dempes ved å samle inn flere dataprøver og stacke disse sammen for hver undersøkelse. I videre undersøkelser av 4D-inversjon forenkles problemet ved å legge på støyen i $\mathbf{d}^{\text{r-b}}$ som i ligning (5.1). Det legges på 5 og 10% støy. Kunnskapen om støyen i dataene benyttes i inversjonen, løsningen finnes ved vektete dempet minste kvadrater (5.2).



Figur 5.15: Støy i differansedata ved 1 og 10% støy i dataene etter hver måling. Differansen etter 2 år i blått og etter 4 år i rødt, vises både med og uten støy.

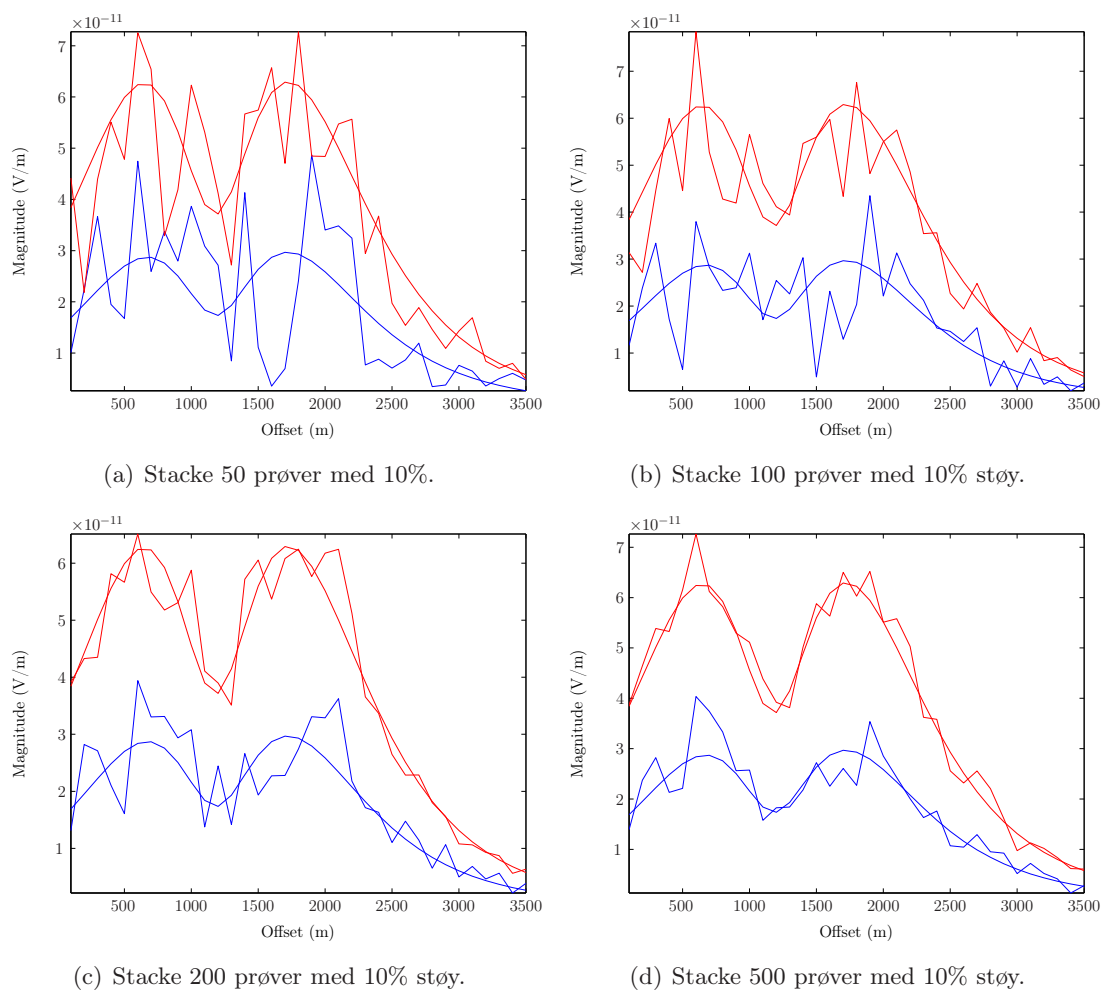
Born-forovermodellering og inversjon

Inversjonsresultatene med Born-Born-metoden er vist i figur 5.18. Her er konduktivitetsendringene i reservoaret mellom 2 tidssted vist i kartplan, med samme fargeskala for i estimert og sann modell for hver tidsdifferanse. Figurene 5.19-5.20 plottet opp den sanne og estimerte løsningen for hver modellparameter. Born-Born-metoden har en tendens å underestimere konduktivitetsverdiene i inversjonen etter 2 år med produksjon, mens etter 4 år er inversjonsresultatene mer nøyaktige, men med noe dårlig oppløsning. For begge tidsstegene klarer inversjonen å estimere de laveste endringene riktig.

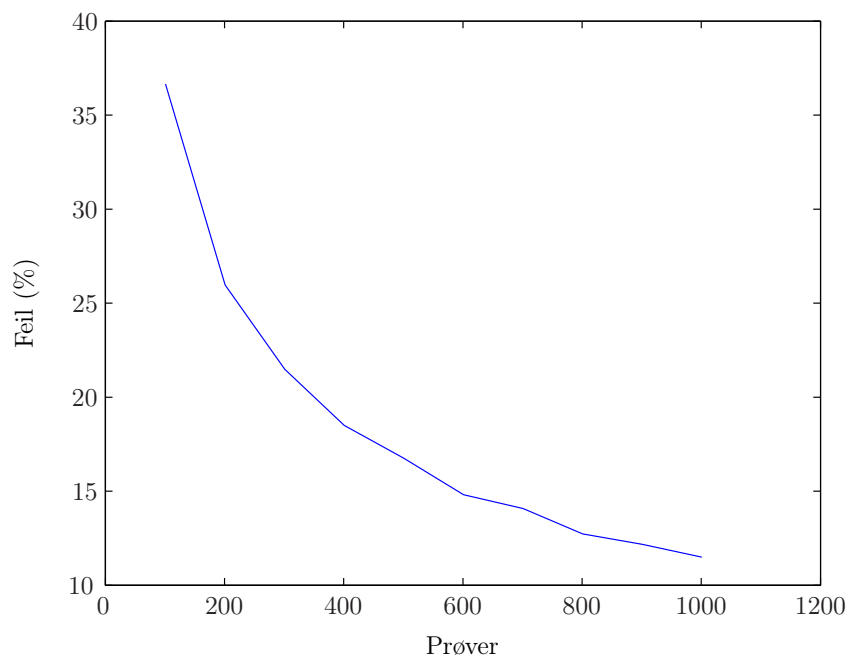
SLN-forovermodellering og inversjon med SLN og Born

Resultatene med SLN-inversjon vises i figurene 5.21 - 5.23. Inversjon av SLN-genererte data med Born-metoden blir bedre enn inversjon med SLN. SLN-Born-resultatene er vist i figur 5.24 - 5.26.

Generelt observeres best inversjonsresultat etter 2 år med produksjon når dataene er modellert med SLN. Etter 2 år er konduktivitetsendringene lavest, og volumet det integreres over er minst. Feilen i løsningene beregnet ved ligning (5.3) er oppgitt i tabell 5.3 for Born-Born, SLN-SLN og SLN-Born. Figurene med inversjonsresultatene viser ikke like stor forskjell mellom inversjonene til de Born- og SLN genererte dataene som tallene tilsier. Det er viktig å studere plottene sammen med feilen i de estimerte modellene for å få best mulig forståelse av



Figur 5.16: Støy i differansedata ved 10% støy i dataene etter hver måling før dataene stackes sammen med 50, 100, 200 og 500 prøver. Differansen etter 2 år i blått og etter 4 år i rødt, vises både med og uten støy

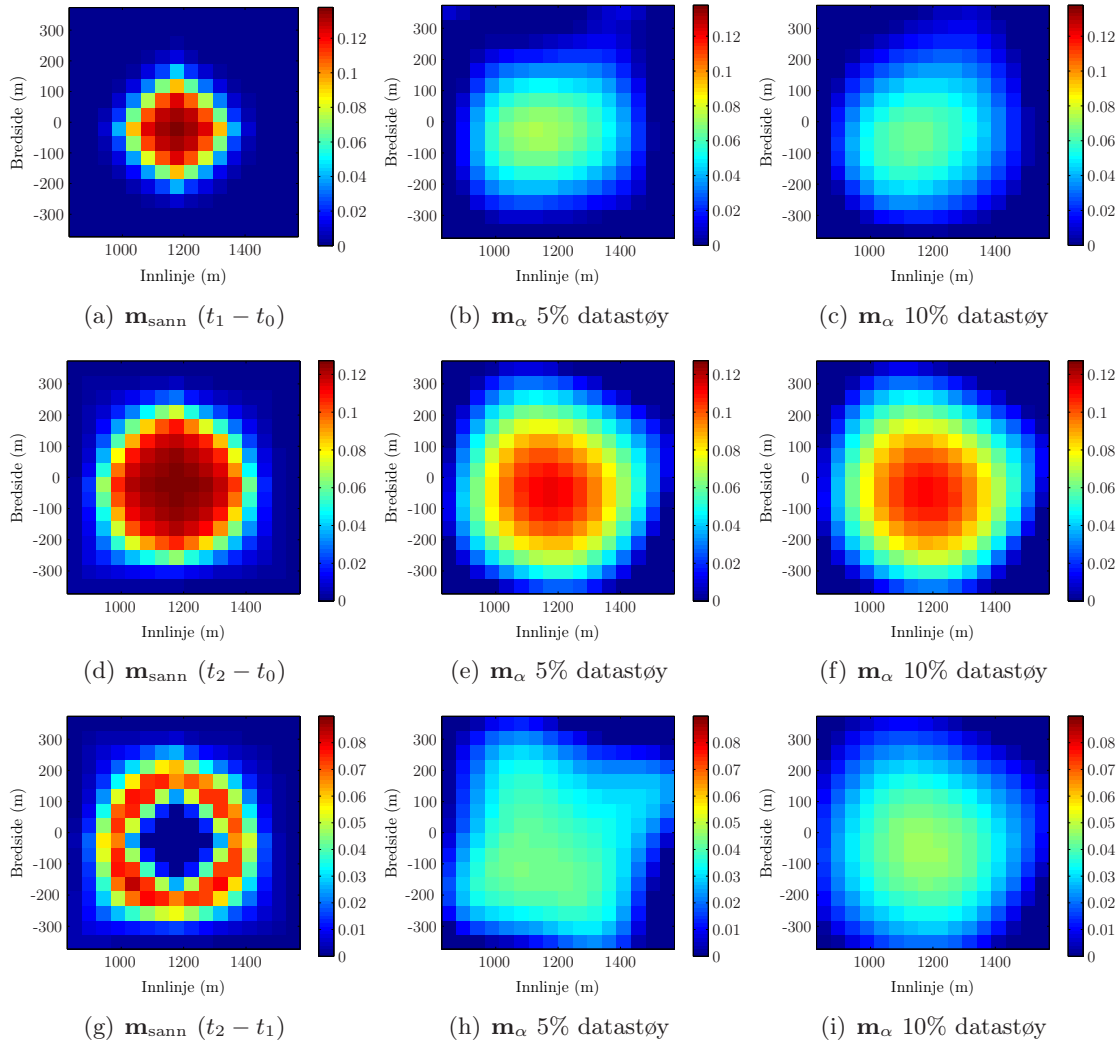


Figur 5.17: Plotter feil i differansedata som funksjon av antall prøver som stackes sammen. Det er her 10% støy i hver prøve før “stacking” og subtraksjon av hver undersøkelse.

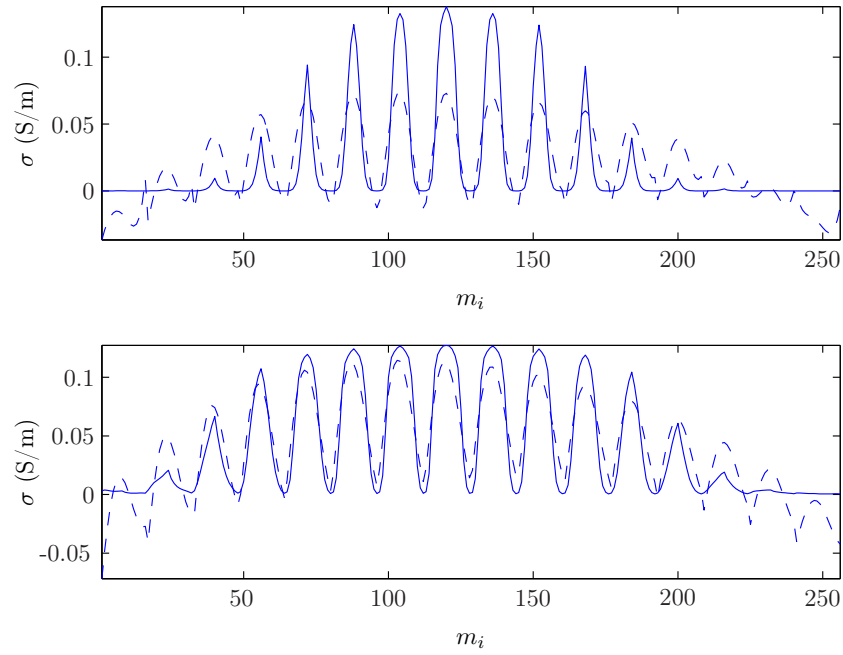
inversjonsresultatene.

SLN-SLN overestimeres konduktivitesendringene etter 2 år og den estimerte modellen har noe lav oppløsning. SLN-Born klarer å estimere konduktivitetsverdiene nokså bra, men har også lav oppløsning. Etter 4 år overestimeres konduktivitetskontrasten for begge metodene.

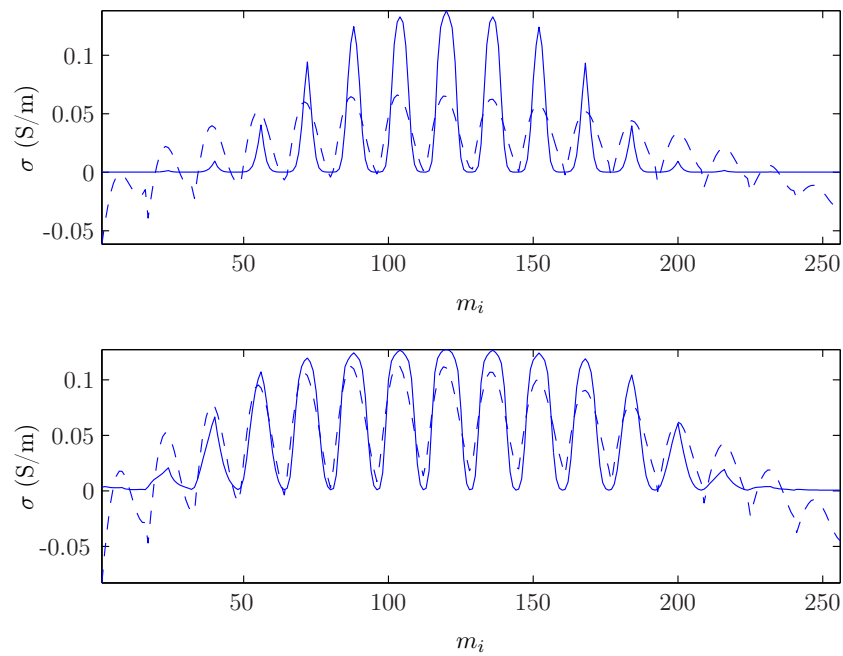
SLN-Born gir best inversjonsresultater for differansedataene etter 2 år med produksjon, dette kan skyldes endringer over et større volum etter 4 år. For å unngå store volumendringer, undersøkes inversjonen av differansedataene mellom 2 og 4 år med produksjon. Her vil også konduktivitetskontrastene bli mindre. Inversjonens forsøkene klarer å finne de riktige konduktivitetsverdiene, men sliter med å gjenskape det virkelige bildet over produksjonsutviklingen og bevegelsen av vannfronten. Konduktivitetskontrastene etter inversjon er gode estimat, sammenlignet med $t_2 - t_0$, men det virkelige mønsetert på konduktivitesendringer kommer dårlig frem, oppløsningen til den estimerte modellen er lav. Det kan derfor lønne seg å invertere 4D-data over minst mulig tidsintervall for å få minst kontraster og endringer over mindre volum. For å teste ut om inversjonen av dataene fra det siste tidsintervallet lar seg gjøre, prøves inversjon av dataene med kun 0.01% støy (figur 5.27). Oppløsningen blir bra, den gjenkjennbare “smultringen” som dannes observeres også i inversjonsmodellen.



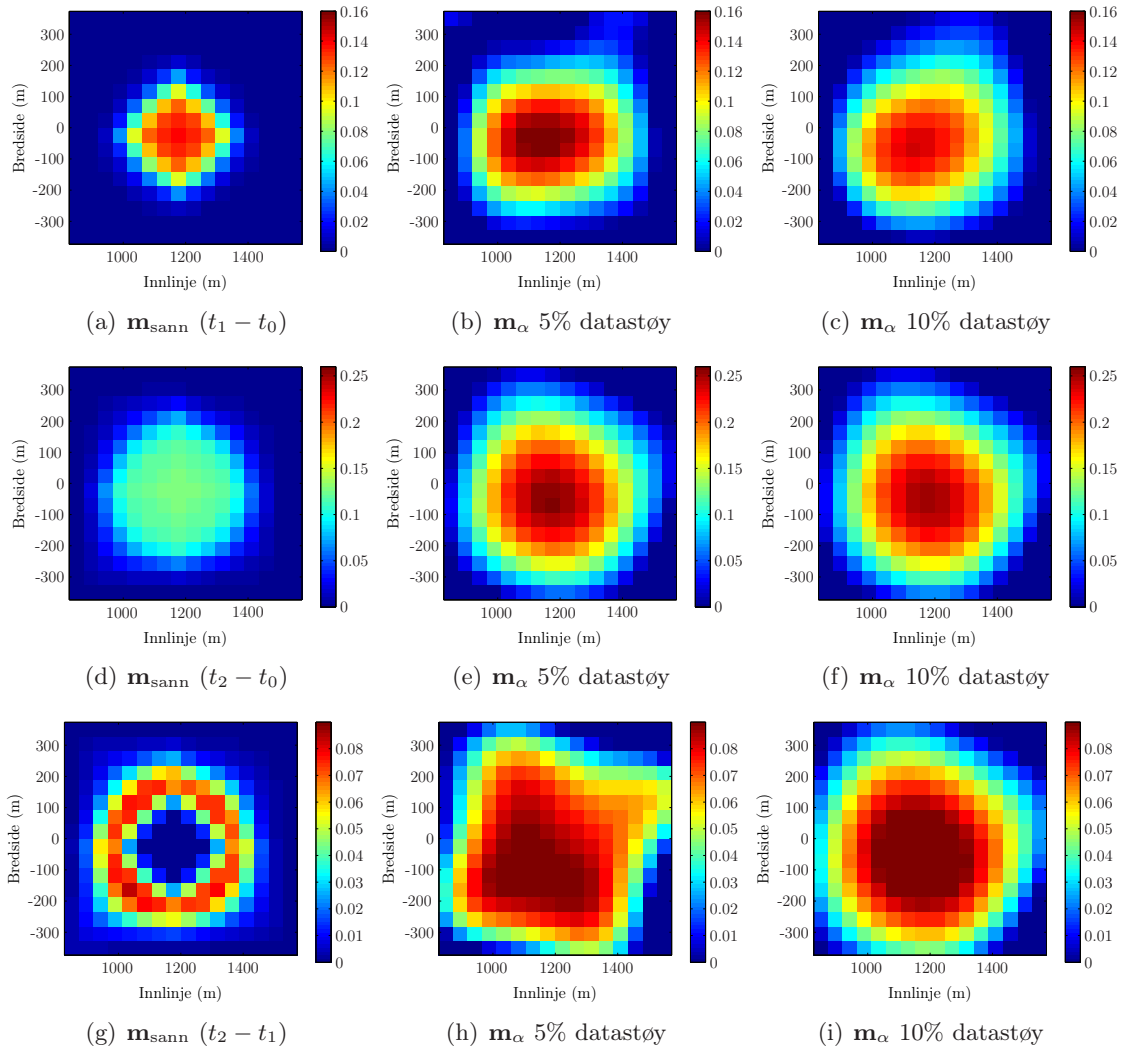
Figur 5.18: Sann og estimert endring i konduktivitet i reservoaret etter 2 og 4 år, med 5 og 10% støy i dataene (Born-Born). Sett i kartplan.



Figur 5.19: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år med 5% datastøy (Born-Born).



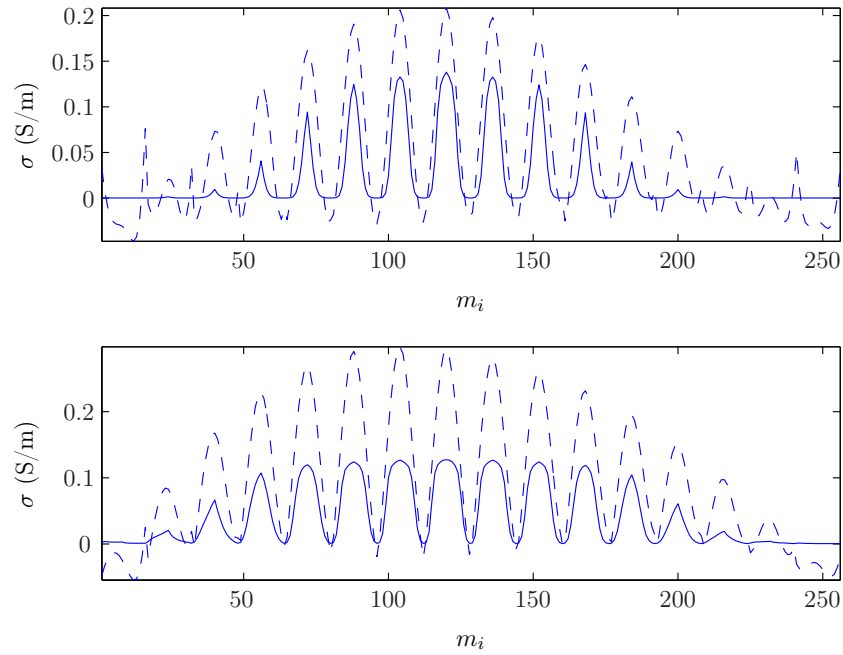
Figur 5.20: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år med 10% datastøy (Born-Born).



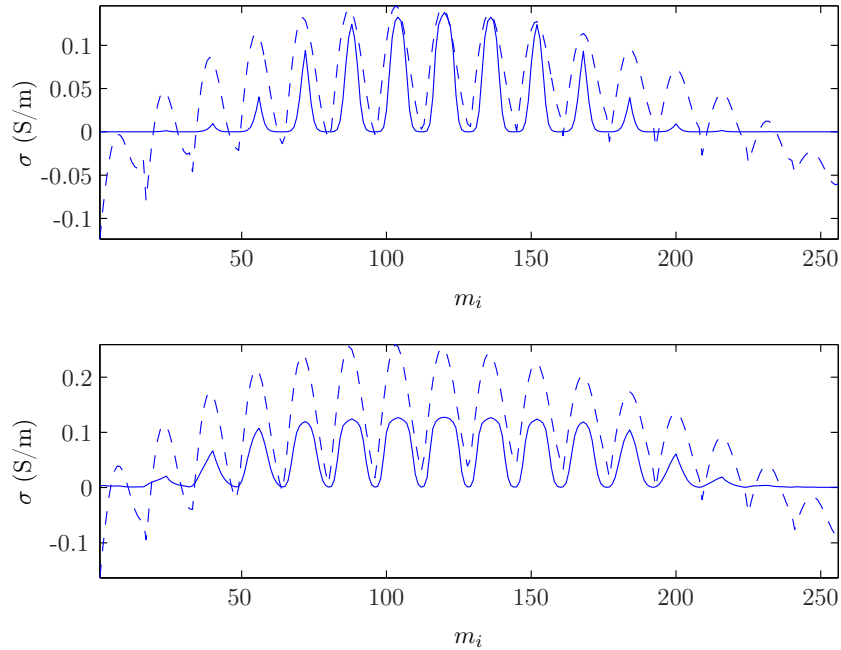
Figur 5.21: Sann og estimert endring i konduktivitet i reservoaret etter 2 og 4 år, med 5 og 10% støy i dataene (SLN-SLN). Sett i kartplan.

Støy (%)	Data	ε_{BB} (%)	$f(\mathbf{m})$	ε_{SS} (%)	ε_{SB} (%)	$f(\mathbf{m})$
5	$t_1 - t_0$	57.82	1301	110.95	106.84	1300
	$t_2 - t_0$	32.05	1287	119.66	109.04	1287
	$t_2 - t_1$	62.28	1439	117.19	114.18	1438
10	$t_1 - t_0$	62.52	1289	109.15	106.19	1289
	$t_2 - t_0$	34.25	1285	120.77	110.54	1285
	$t_2 - t_1$	60.79	1410	110.00	106.56	1410

Tabell 5.3: Feil i løsning og verdien til objektivfunksjonen med den estimerte modellen (samme for SLN-SLN (\mathbf{t}) og SLN-Born ($\Delta\sigma$)) for ulike mengder støy i dataene.



Figur 5.22: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år med 5% datastøy (SLN-SLN).



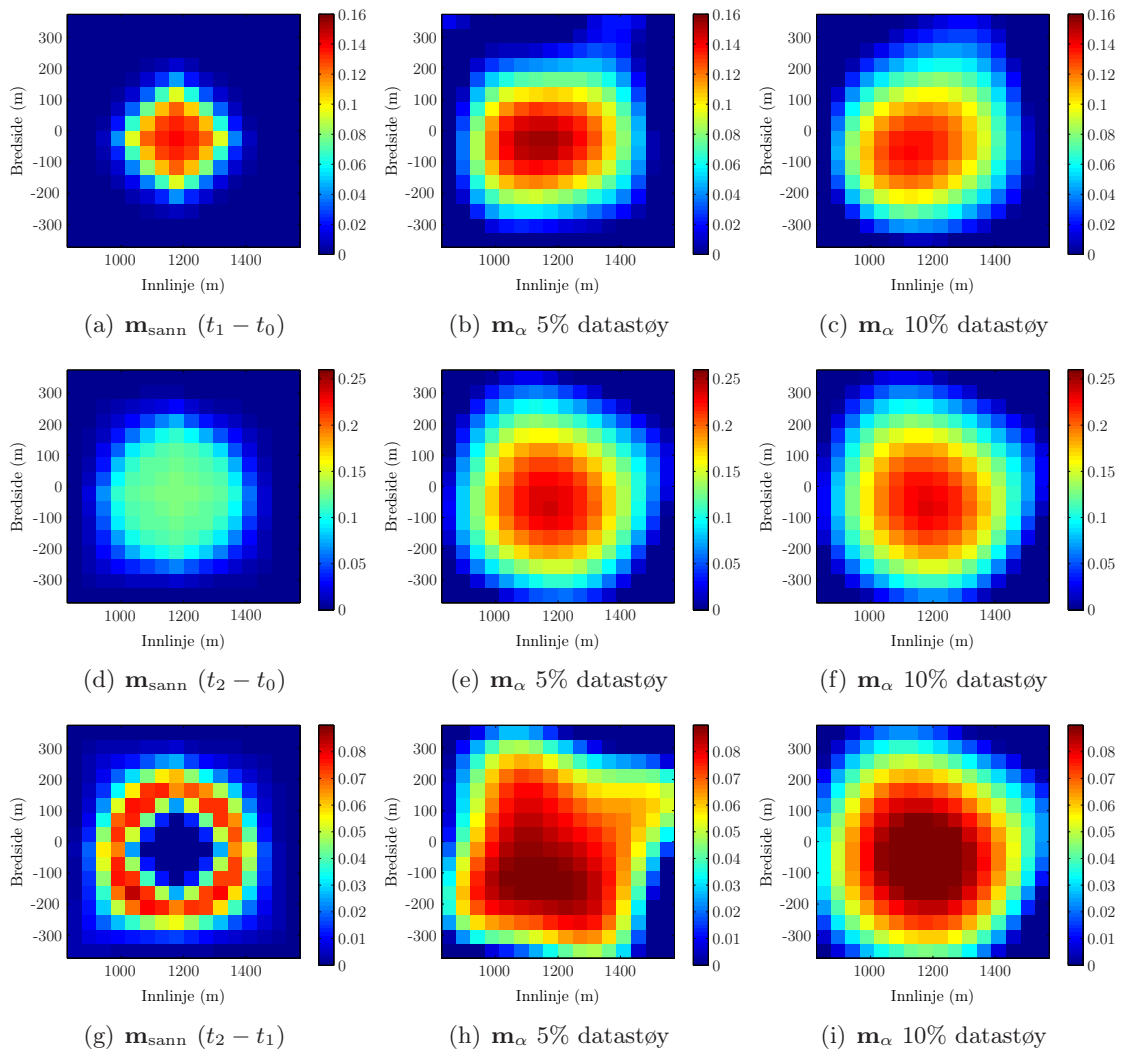
Figur 5.23: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år 10% datastøy (SLN-SLN).

5.3.4 Støyforplantning fra $t(\Delta\sigma)$ til $\Delta\sigma$

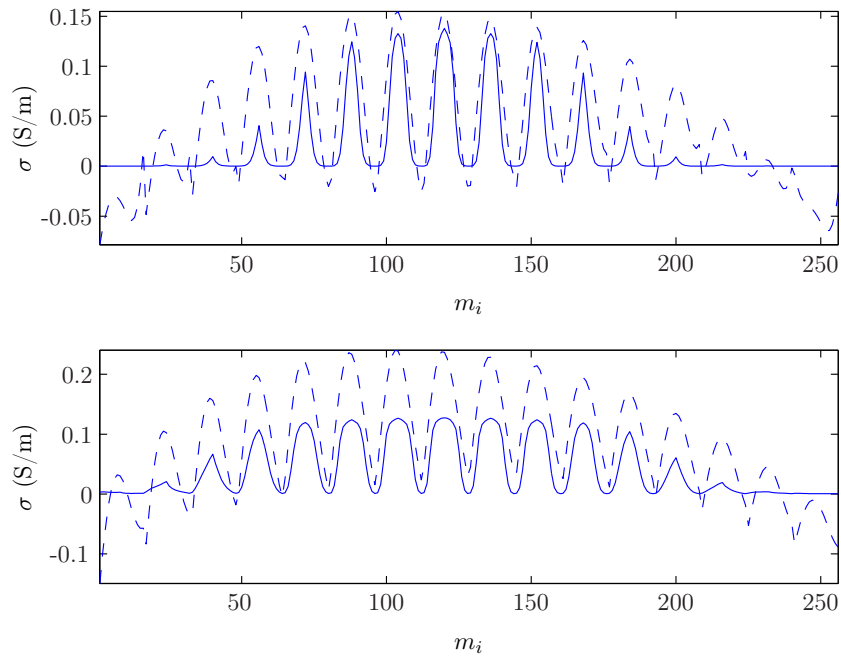
Her utføres Monte Carlo simulering for å undersøke støyforplantningen fra t til $\Delta\sigma$, når $\Delta\sigma = \langle \Delta\sigma^{(r)} - \Delta\sigma^{(b)} \rangle$, etter 4 år med produksjon. Det legges til tilfeldig normalfordelt støy med standardavvik på 0.1 i t -verdi og middelerdi $\mu_t = 0.040068$. Endringen i konduktivitet beregnet fra t har standardavvik $\text{std}(\Delta\sigma) = 0.010271$ og middelerdi $\mu_{\Delta\sigma} = 0.040645$. Histogram for de to fordelingene er vist i figur 5.28. Standardavviket i feilen fra t -verdi gjennom ikke-lineær inversjon, til estimerte $\Delta\sigma$ -verdier har i dette tilfellet økt. Det vil si at feilen i $\Delta\sigma$ blir større enn feilen i t etter den ikke-lineære inversjonen og det er mer usikkerhet koblet til de estimerte verdiene.

5.4 Feil i 4D CSEM-inversjon og forbedringer

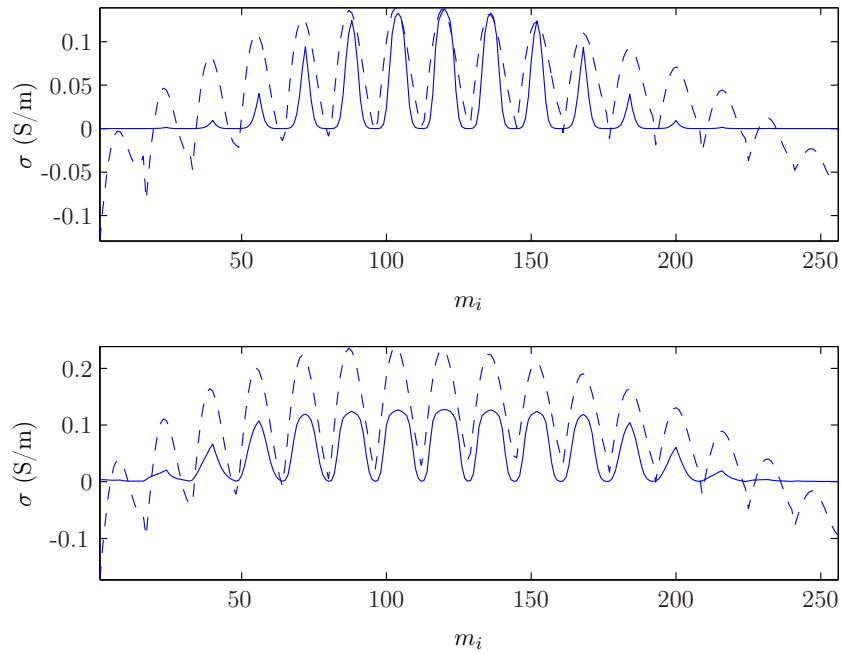
Det finnes mange måter å optimalisere inversjonsresultatet på. En annen type regularisering og inversjonsmetode ville kunne estimert bedre modellparametre, for eksempel ville det vært interessant å undersøke “Focusing Inversion” introdusert av Portniaguine og Zhdanov (1999). Flere mottakere på havbunnen vil også bidra til mer informasjon i inversjonen og stabiliteten i det inverse problemet vil øke. Høyere oppløsning oppnås med høyere frekvenser, mens lavere frekvenser øker skindypet til den elektromagnetiske bølgen. En annen måte å forbedre



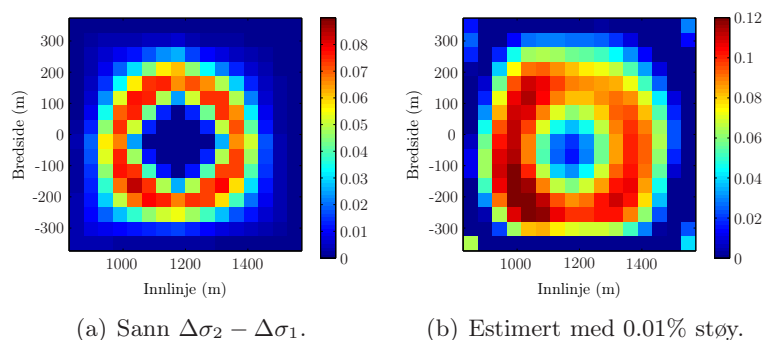
Figur 5.24: Sann og estimert endring i konduktivitet etter 2 og 4 år med 5 og 10% datastøy (SLN-Born).



Figur 5.25: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år med 5% datastøy (SLN-Born).



Figur 5.26: Plot av sann (—) og estimert (---) løsning etter 2 og 4 år med 10% datastøy (SLN-Born).

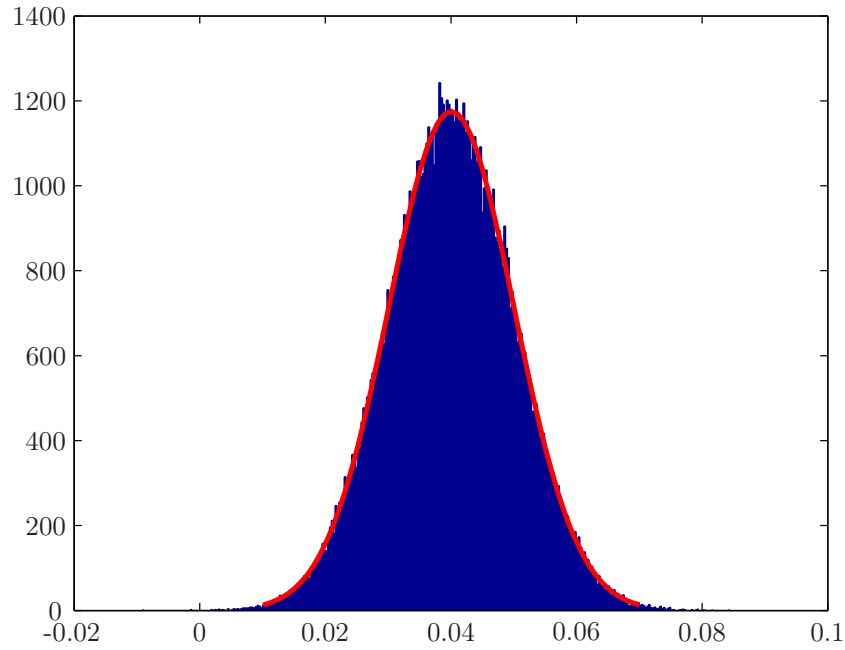
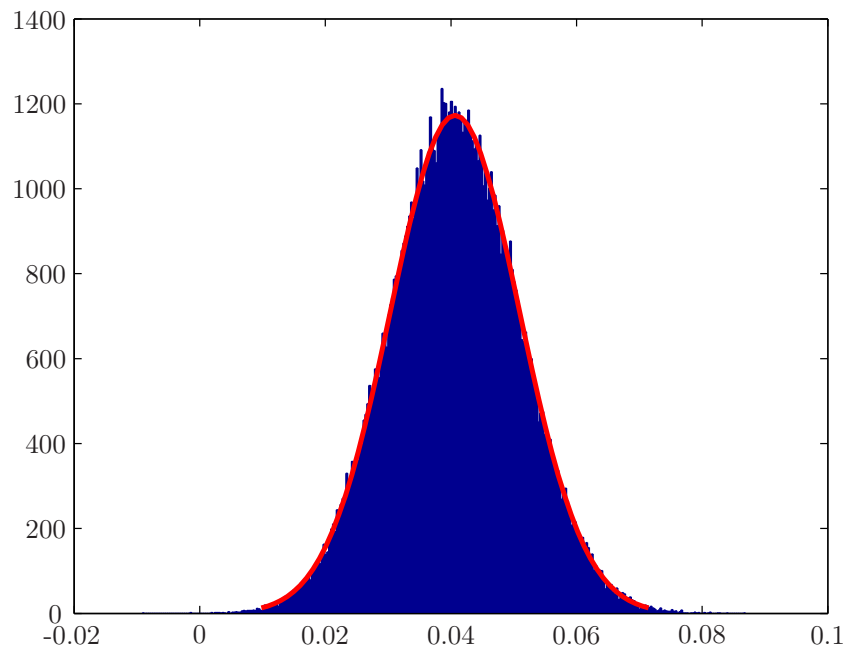


Figur 5.27: Sann og estimert modell i reservoaret, endringen i konduktivitet fra 2 til 4 år med produksjon (SLN-Born). Her er det lagt til 0.01% støy, merk ulik fargeskala.

resultatene vil være flere mottakere eller flere målinger. I praksis benyttes et mindre antall mottakere enn de numeriske eksemplene i denne oppgaven, men med flere målinger etterhvert som kilden beveges over prospektområdet.

Masteroppgaven til Seyffarth (2009) undersøker feil i mottakerposisjon og orientering for 4D-undersøkelser med tanke på forovermodellering av EM-feltet som registreres. Resultatene presentert indikerer robuste 4D-signaler med hensyn til feil i mottakerposisjon, der repeterte målinger tåler en feil på ± 10 meter. Undersøkelser av amplituden til 4D-dataene viser en større sensitivitet når det kommer til helning og rotering av mottakerne på grunn av den store forskjellen i x , y og z komponentene til det elektriske feltet. Fase undersøkelsene virker noe mer lovende, men det kan være vanskelig å trekke ut informasjon på grunn av svake signal. Fra numeriske resultater konkluderer Seyffarth (2009) med å bruke faste installasjoner av mottakere på havbunnen for å oppnå akseptable resultater i 4D-undersøkelser.

Zach et al. (2009) har undersøkt feilene i 4D-undersøkelser med tanke på repeterbarhet og konkluderer at kilden vil lage rundt 5% feil i dataene registrert ved mottakerne i de repeterte undersøkelsene. I praksis er en horisontal kilde i forbindelse med 4D-undersøkelser bedre enn vertikale kilder på grunn av repeterbarheten. Det er vanskelig å holde store, vertikale kilder i riktig posisjon, både i basisundersøkelsen og senere. Dette skyldes blandt annet sterke strømmer i havet. Det er også lettere å utføre undersøkelsene med de vanlige HED-kildene, disse kan slepes bak en båt og er lette å manøvrere. Feil i kilde posisjon kan føre til store feil i de inverterte 4D-dataene.

(a) Histogram over t -verdier med $\text{std}(t) = 0.0099$.(b) Histogram over $\Delta\sigma$ verdier med $\text{std}(\Delta\sigma) = 0.0102$.

Figur 5.28: Histogram over feil i t -verdier med 1% standardavvik, og følgende feil i $\Delta\sigma$. Standardavviket i de estimerte modellene minker fra t til $\Delta\sigma$.

Mottakere (antall)	ε_m (%)	CPU tid (sek)	$E[f(\mathbf{m}_{\text{est}})]$	$f(\mathbf{m}_{\text{est}})$
$7 \times 35 = 245$	103.67	3.30	510	692
$13 \times 35 = 455$	106.19	7.84	1156	1289
$21 \times 40 = 840$	120.89	33.33	2331	2595
$25 \times 45 = 1125$	106.70	76.62	3198	3360

Tabell 5.4: Tabellen viser feil i \mathbf{m}_{est} med ulike mengder mottakere. Det er 10% støy i SLN-dataene invertert ved Born, og beregningstiden for inversjonen i hvert forsøk er oppgitt under ‘CPU tid’.

Forsøket er utført på differansedataene etter 2 år med produksjon.

5.4.1 Numeriske eksempel

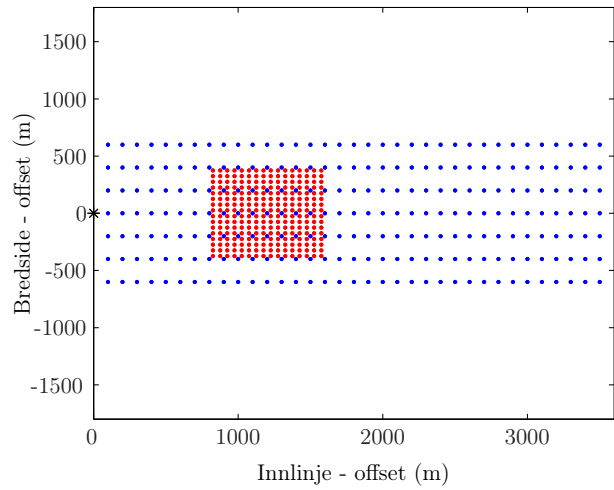
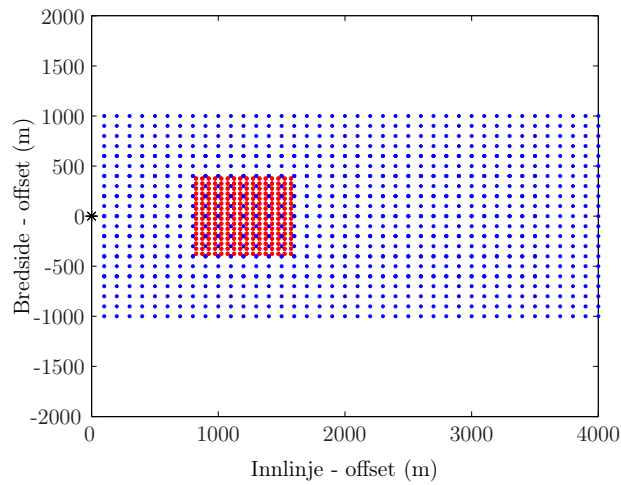
Ettersom SLN-approksimasjonen gir de beste forovermodelleringsestimaterne, benyttes data generert med SLN til videre analyser. Av inversjonsresultatene fra SLN-modellerte data, viste Born-inversjonen å gi det beste resultatet i differansedataene etter 2 år. Inversjon med Born er også raskere enn inversjon med SLN, inversjonen videre utføres ved Born-metoden på $t_1 - t_0$ data.

Endre antall mottakere

Dersom antall datapunkt økes, vil dette gi mer stabilitet i det inverse problemet, mer data benyttes til å estimere konduktivitetsverdiene. Beregningstiden vil også øke ved å legge til flere mottakere, der Born-inversjon med 455 mottakere bruker 8.85 sekunder. Antall modellparametere er konstant $N = 256$ og det legges til 10% støy i dataene. Antar 5% kildefeil (Zach et al., 2009) og resten er andre støyfaktorer som for eksempel resistive havbunnsinstallasjoner eller magnetotellurisk (MT) støy. En antar her faste mottakere plassert på havbunnen.

I det første forsøket fjernes annenhver mottakerrekke. Det er nå 7 mottakerrekker med 35 mottakere i hver rekke. I rekkene er mottakerne plassert med 200 meters mellomrom, se geometrien i figur 5.29(a). Inversjonen tar 3.15 sekunder og feilen i løsningen er vist i tabell 5.4 sammen med beregningstiden og verdien av objektivfunksjonen med den estimerte modellen. $f(\mathbf{m})$ er for alle inversjonsresultatene innenfor den forventede verdien med β av $O(1)$, løsningene er gyldige.

Inversjonsresultatene for ulike mengder mottakere er vist i figur 5.30. Her er endringen i konduktivitet i hver gridcelle fra basisundersøkelsen til de repeterte målingene vist i kartplan. Merk ulik fargeskala i inversjonsresultatet for 840 mottakere. Mottakergeometrien er vist i figur 5.29(b). Det er en forbedret oppløsning i dataene ved 840 mottakere, men i forsøket

(a) 7×35 mottakere(b) 21×40 mottakere

Figur 5.29: Geometrien i undersøkelsene for (a) 7×35 mottakere og (b) 21×40 mottakere. I (a) er det 200 meter mellom hver av de 7 mottakerrekkene, mens i (b) er det 100 meter mellom rekke. Alle rekkene har 35 mottakere plassert hver 100ende meter. Gridcellene i reservoaret er markert i rødt.

med 1125 mottakere blir inversjonsresultatet omtrent det samme som for 455 datapunkt. Konduktivitetsverdiene der det skjer en endring er overestimert i inversjonen, og er trolig grunnen til den store feilen i løsningen sammenlignet med den sanne modellen (se tabell 5.4). Resultatene her viser en veldig økning i beregningstid uten at inversjonsresultatet blir betraktelig bedre med flere mottakere, så lenge $M > N$.

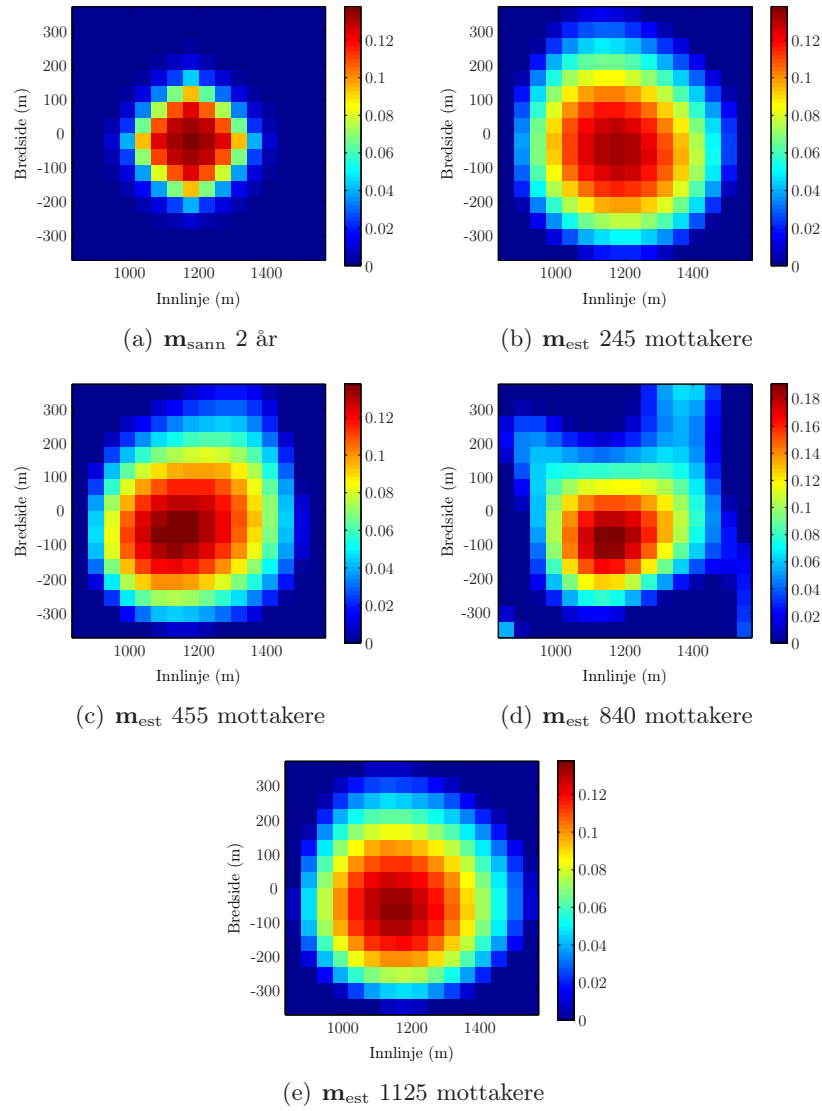
5.4.2 Endre frekvens, konstant reservoardyp

Ved å øke frekvensen til 0.75 Hz vil skindypet minske til 581 meter og det registrerte anomale feltet blir svakere. Dette vil i praksis gjøre det enda vanskeligere å skille det anomale feltet fra bakgrunnsfeltet eller å beregne forskjeller i magnitudo til repeterte målinger fra basisundersøkelsen. En lavere frekvens har et høyere skindyp og gir et sterkere signal, men på bekostning av en dårligere oppløsning. Amplituden og fasen til $\mathbf{E}^{(r-b)}$ uten støy, beregnet ved $f = 0.25$ Hz og $f = 0.75$ Hz, er plottet opp som funksjon av offset i figur 5.31 for Born og figur 5.32 for SLN-metoden. Faseberegningene, som kun avhenger av $\mathbf{E}^{(0)}$, er like for SLN og Born, og gir ingen informasjon om reservoaregenskapene. Amplitudeverdien avtar med økende frekvens, spesielt for offset større enn 1300 meter. Dette kan skyldes raskere demping av de høyere frekvensene, og er spesielt merkbart når feltet må bevege seg over større strekninger.

For et reservoar på 500 meter under havbunnen, testes inversjonen ved bruk av ulike frekvenser. Bakgrunns- og reservoarmodellen er den samme som før med unntak av dypet på reservoaret. Frekvensene som undersøkes er 0.1, 0.25, 0.75 og 1.25 Hz. Det legges 10% støy på hver datakomponent og den estimerte løsningen beregnes ved dempede minste kvadraters metode (3.28), hvor α velges med prøving og feiling. Dataene genereres ved SLN, og invertert med Born. Se resultatene i figur 5.33. Frekvens, skindyp og feil i de estimerte løsningen for konstante α er gitt i tabell 5.5. Feilen i de estimerte modellene øker med avtagende frekvens, samtidig som den inverterte matrisen blir bedre betinget. Størrelsen på de minste singulære verdiene er av samme orden for alle frekvensene. Ut i fra forovermodelleringen og inversjonsresultatene, har valg av frekvens størst påvirkning i forovermodelleringen.

5.4.3 Endre reservoardyp med $f = 0.75$ Hz

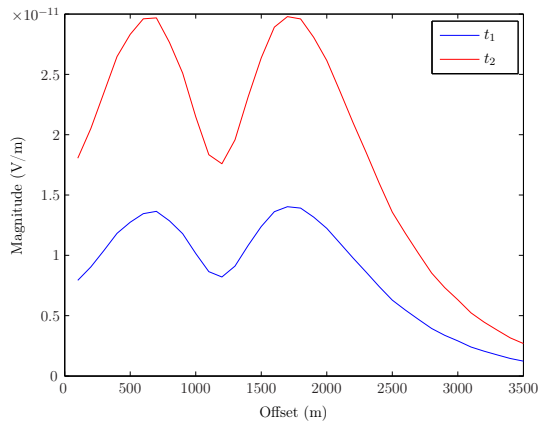
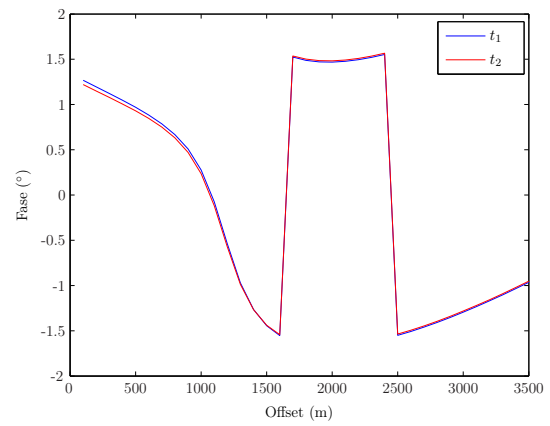
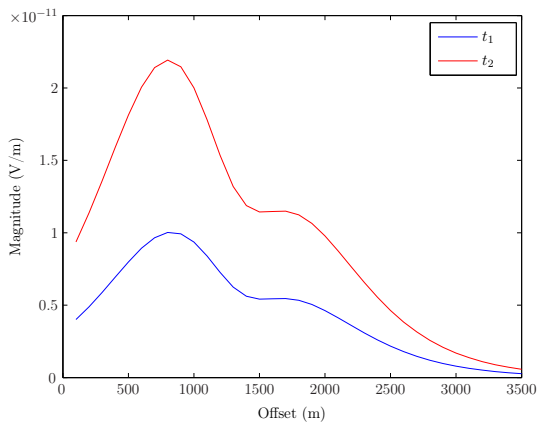
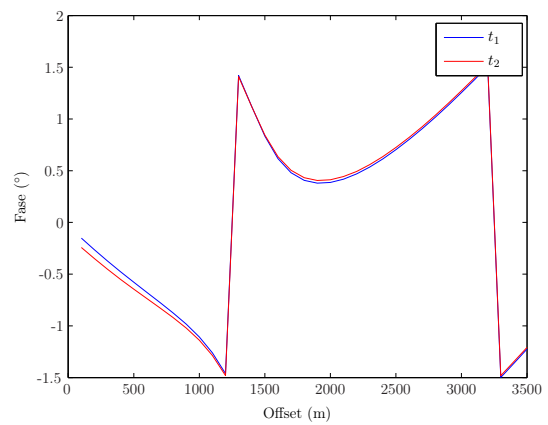
Ved reservoar på 500 meters dyp, vil mindre enn 37% av energien være dempet på reservoarnivå for $f = 0.75$ Hz, og feltet vil avbilde undergrunnen med høyere oppløsning enn for lavere frekvenser Hz. Det legges til 10% støy i forovermodellerte data for reservoar plassert 400, 500, 700 og 1150 meter under havbunnen. I inversjonen oppnås det beste resultatet ved å estimere modellen med dempede minste kvadrater (3.28), hvor α finnes med prøving og feiling.



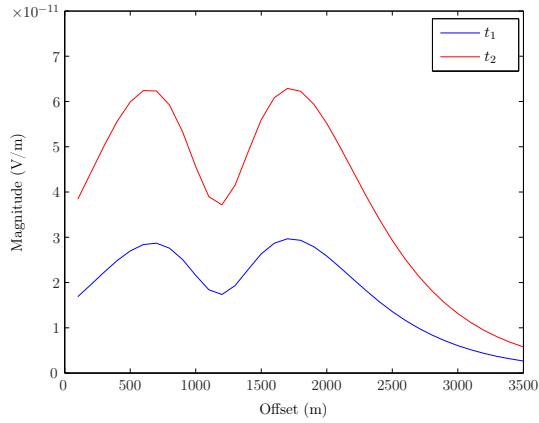
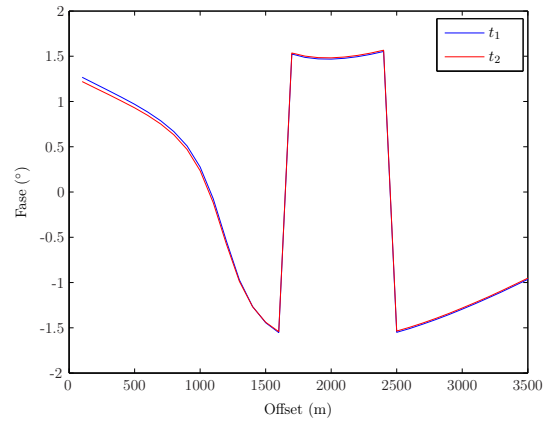
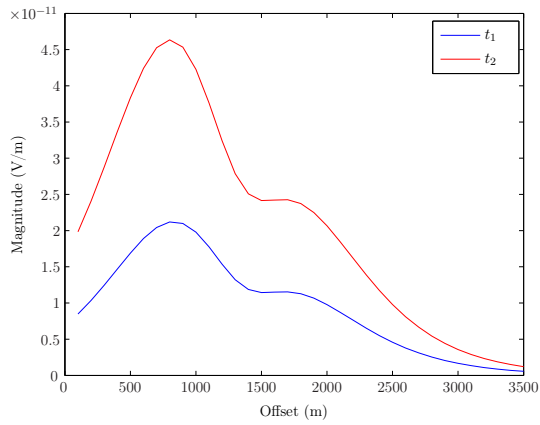
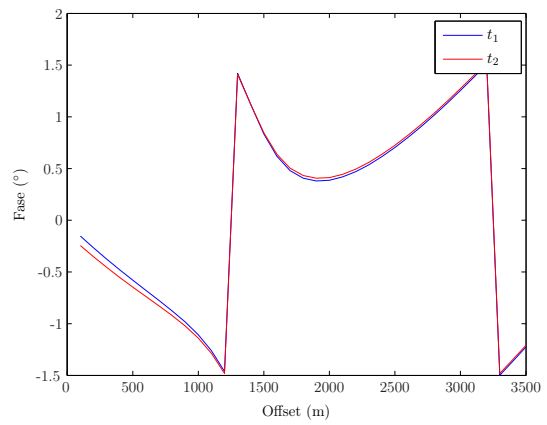
Figur 5.30: Merk ulik fargeskala. Inversjon etter 2 år med produksjon. Modellerte data med SLN og 10% støy, invertert med Born, for ulike antall mottakere. Merk ulik fargeskala i (d).

Frekvens (Hz)	Skindyp (m)	ε_m (%)	α	$\min(s_i)$	$\text{Cond}(\mathbf{G}_\alpha)$
1.25	450	76.385	7.0e-10	3.1006e-23	3.5771e+01
0.75	581	78.818	1.0e-09	4.5913e-23	1.8038e+01
0.25	1006	81.734	1.5e-09	7.6765e-23	8.5724e+00
0.1	1591	81.234	2.0e-09	9.1059e-23	5.2594e+00

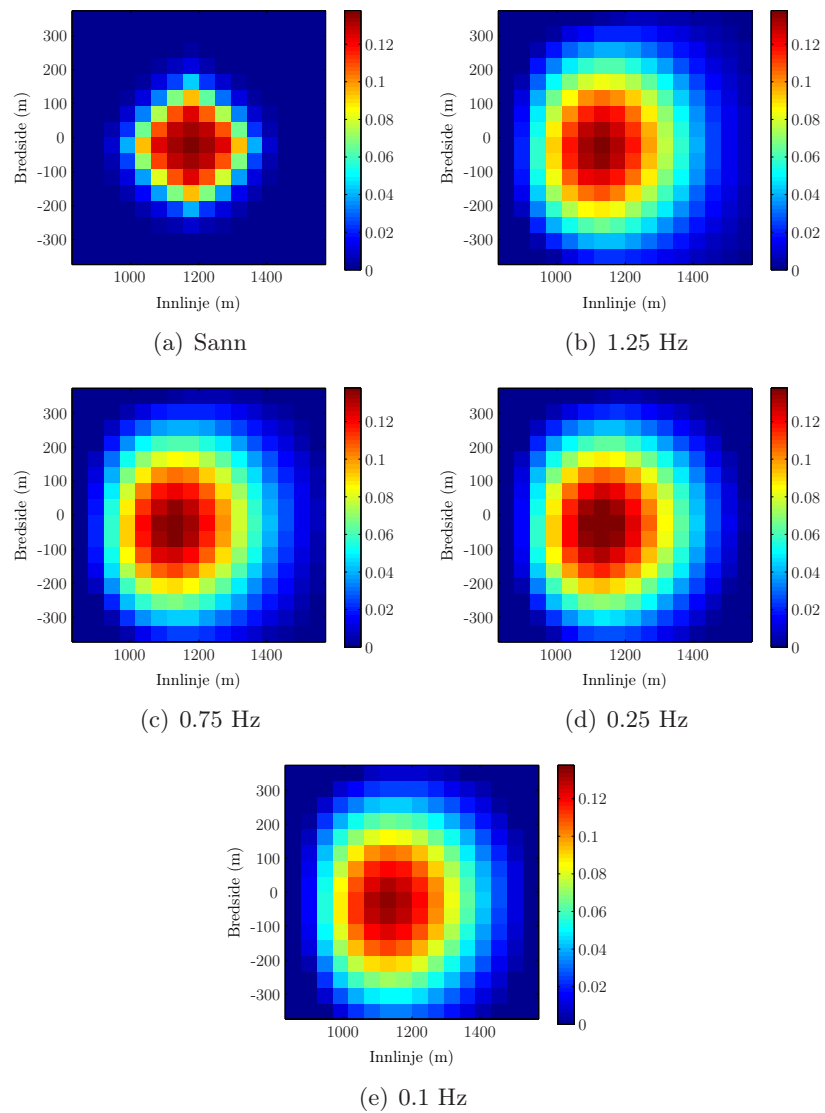
Tabell 5.5: Feilen i \mathbf{m}_{est} for ulike frekvenser. Det er 10% støy i SLN-dataene invertert ved Born.

(a) MVO \mathbf{E}_x^{r-b} Born 0.25 Hz(b) FVO \mathbf{E}_x^{r-b} Born 0.25 Hz(c) MVO \mathbf{E}_x^{r-b} Born 0.75 Hz(d) FVO \mathbf{E}_x^{r-b} Born 0.75 Hz

Figur 5.31: Endring i amplituden og fase til det anomale elektriske feltet over tid beregnet ved Born, \mathbf{E}_x^{r-b} etter 2 (rød) og 4 (blå) år. I (a)-(b) er $f = 0.25$ Hz og i (c)-(d) er $f = 0.75$ Hz.

(a) MVO \mathbf{E}_x^{r-b} SLN 0.25 Hz(b) FVO \mathbf{E}_x^{r-b} SLN 0.25 Hz(c) MVO \mathbf{E}_x^{r-b} SLN 0.75 Hz(d) FVO \mathbf{E}_x^{r-b} SLN 0.75 Hz

Figur 5.32: Endring i amplitude og fase til det anomale elektriske feltet over tid beregnet ved SLN, \mathbf{E}_x^{r-b} etter 2 (rød) og 4 (blå) år. I (a)-(b) er $f = 0.25$ Hz og i (c)-(d) er $f = 0.75$ Hz.



Figur 5.33: Inversjon av 4D-data etter 2 år med produksjon. Modellerte data med SLN og 10% støy, invertert med Born.

Dyp (m)	ε_m (%)	α	$\min(s_i)$	$\text{Cond}(\mathbf{G}_\alpha)$
400	73.28	2.5e-09	1.9956e-20	3.7260e+00
500	78.82	1.0e-09	4.5913e-23	1.8038e+01
700	85.53	2.0e-10	6.7554e-26	4.2694e+02
900	100.84	1.5e-11	1.5218e-26	4.2596e+03
1150	102.40	6.0e-12	6.1354e-27	4.7327e+05

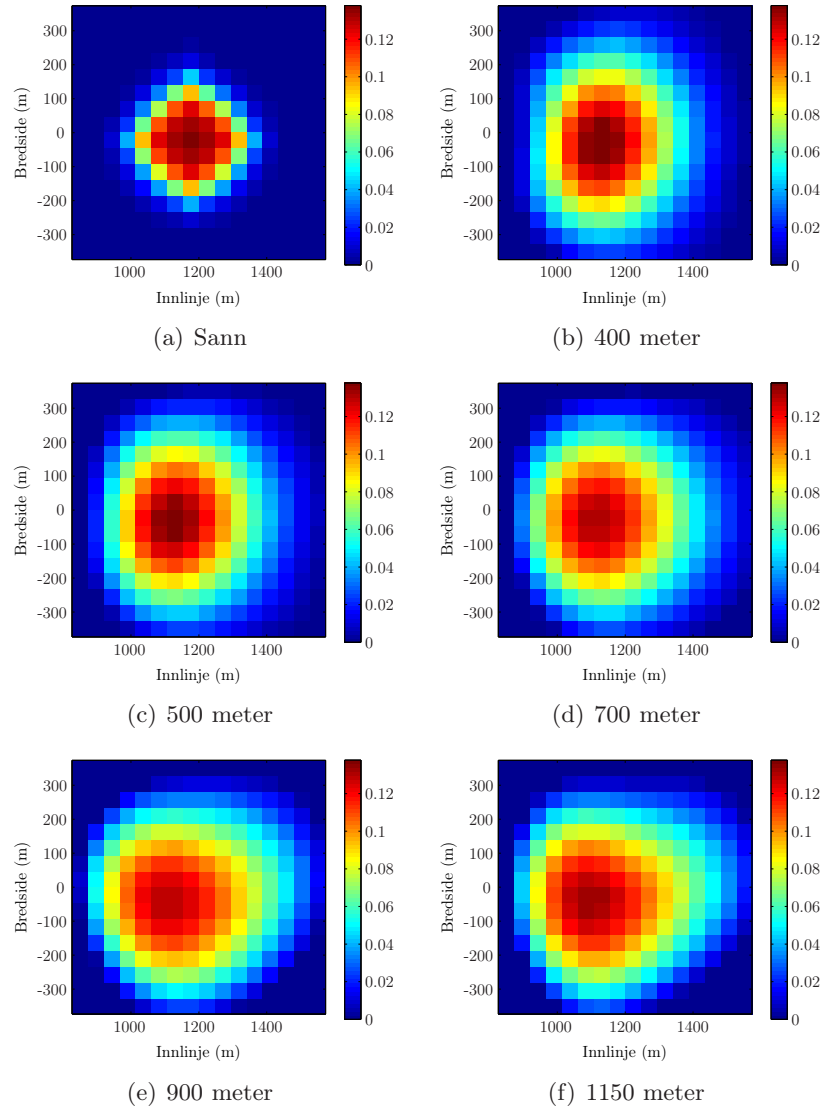
Tabell 5.6: Tabellen viser feil i \mathbf{m}_{est} når reservoardypet øker. Det benyttes her en høyere frekvens $f = 0.75$ Hz for å oppnå en bedre oppløsning. Det er 10% støy i SLN-dataene invertert ved Born.

Feilen i de estimerte modellene er listet i tabell 5.6 sammen med den laveste singulære verdien for problemet, betingelsestallet for den inverterte matrisen og α benyttet i inversjonen. Feilen i løsningene øker med økende reservoardyp, \mathbf{G}_α blir dårligere betinget og de laveste s_i -verdiene blir mindre. Figur av inversjonsresultatene ved de ulike reservoardypene er vist i 5.34. Den sanne løsningen etter 2 år er vist i (a), deretter estimerte løsninger med økende reservoardyp opp til 1150 meter i (f). Det er tydelig av figurene og tallene i tabellen at grunnere reservoar gir bedre inversjonsresultat og bedre betingede inverse problem.

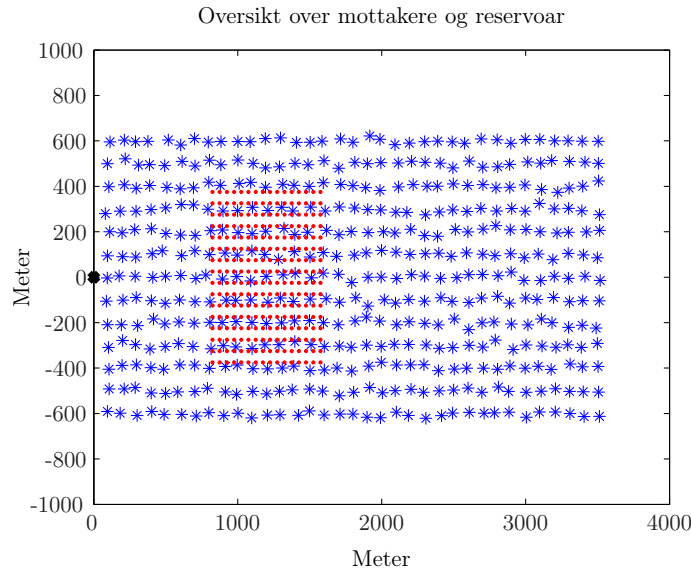
5.4.4 Repeterbarhet og feil i mottakerposisjon

Dersom mottakerne ikke er permanent innstallert på havbunnen, kan det forekomme feil i mottakerposisjoner ved repeterte 4D-undersøkelser. For å teste påvirkningen på inversjonsresultatet, endres mottakerposisjonene tilfeldig med standardavvik på 1, 5 og 10 meter, med utgangspunkt i mottakergeometrien i figur 4.2. Det vil si at alle mottakerne er feilplassert i forhold til basisundersøkelsen. Figur 5.35 plotter opp geometrien for de nye mottakerposisjonene ved 10 meter standardavvik. Når det er feil i mottakerposisjonene, har vi ikke lenger den samme kontrollen over støyen, og den forventede verdien av objektivfunksjonen tilfredsstiller ikke lenger løsningskriteriet ved vektete dempet minste kvadrater. I inversjonen velger jeg derfor å ikke vekte matrisene, men finne en løsning gitt med ligning (3.28). Greens-funksjonen benyttet i inversjonen beregnes for mottakerposisjonene til basisundersøkelsen.

De estimerte modellene ved endring av mottakerposisjon med 1, 5 og 10 meters standardavvik og 10% datastøy er vist i figur 5.36, med den sanne modellen i (a). Av figurene virker inversjonen ok med 1 meter standardavvik, mens for økende feil i mottakerposisjon blir inversjonsresultatene tilsvarende dårlige. Inversjonen klarer ikke å estimere nøyaktige konduktivitetsverdier, og modellene viser lavere oppløsning.



Figur 5.34: Inversjon etter 2 år med produksjon. Modellerte data med SLN og 1% støy, invertert med Born, for ulike antall mottakere.



Figur 5.35: Geometri med de nye mottakerposisjonene med standardavvik 10 meter i forhold til basisundersøkelsen.

5.5 Bergartsfysisk inversjon til vannmetning

Vannmettingen finnes ved inversjon av konduktivitetsverdiene ved bruk av Archies lov. For problemene i denne oppgaven er det benyttet en enkel modell der vannmettingen kun avhenger av konduktiviteten i vannet, den effektive konduktivitet til bergarten og porøsitet i reservoaret. Dersom det er ønskelig å ta hensyn til andre parametere, introduserer Gelius (2007) en bergartsfysisk tilnærming til forovermodellering og inversjon av CSEM-data. Figur 5.37 viser estimert vannmetning, med 10% datastøy, etter 2 (b) og 4 (d) år med produksjon (SLN-Born).

Ved gitt vannmetning kan det totale volumet hydrokarboner beregnes, $V_{HC} = V_{p(tot)} - V_w$. Porevolumet i hver celle er

$$V_p = \phi V_{tot} = 0.17 \times 50\text{m} \times 50\text{m} \times 13\text{m} = 5.525 \times 10^3 \text{ m}^3 = 5.525 \times 10^6 \text{ l.} \quad (5.12)$$

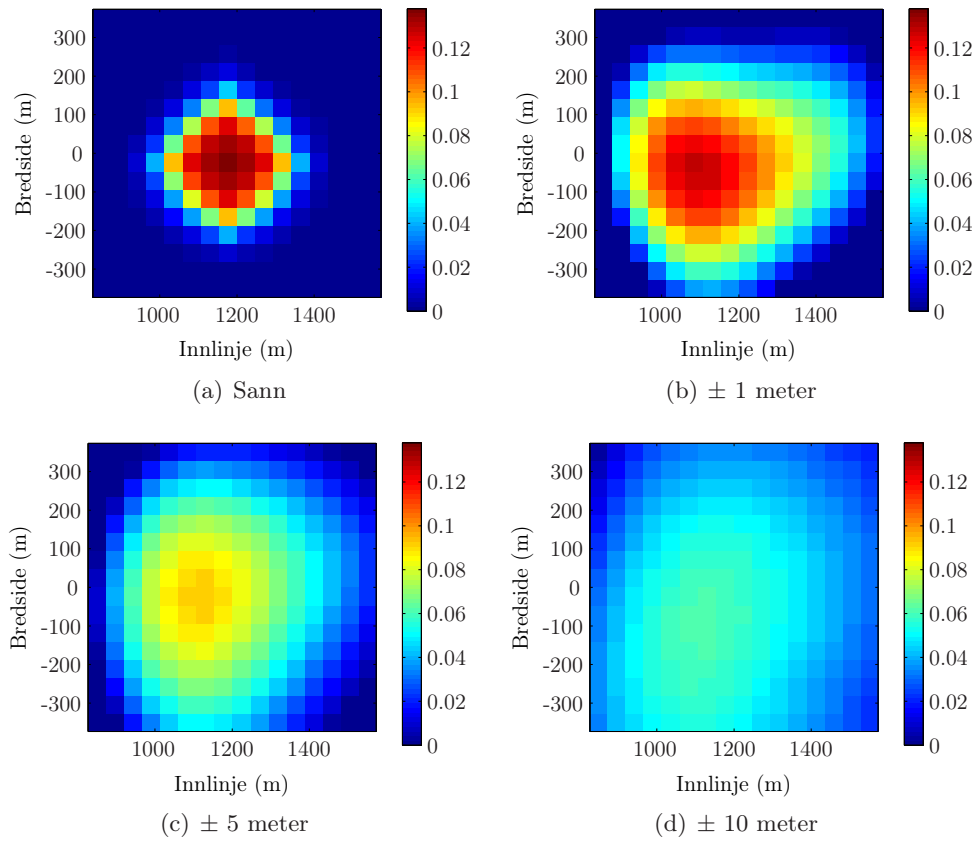
Totalt porevolum er

$$V_{p(tot)} = 0.17 \times 800\text{m} \times 800\text{m} \times 13\text{m} = 1.414 \times 10^6 \text{ m}^3 = 1.414 \times 10^9 \text{ l,} \quad (5.13)$$

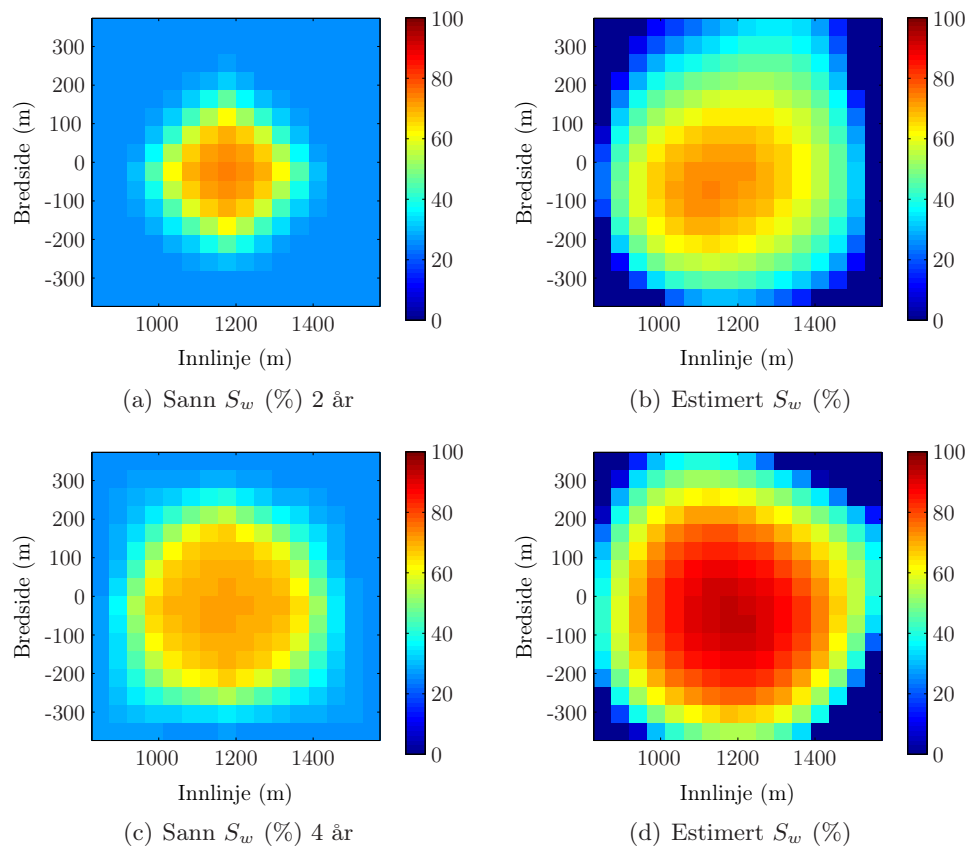
og totalt volum hydrokarboner i reservoaret er

$$V_{HC} = V_{p(tot)} - \sum_i^N (S_w \times V_p)_i. \quad (5.14)$$

Informasjon om injisert volummengde vann og mengden produserte hydrokarboner, kommer fra produksjonssjefen på det aktuelle feltet. Dette brukes til inndata i forovermodelleringen og



Figur 5.36: Inversjon etter 2 år med produksjon. Modellerte data med SLN og 10% støy, invertert med Born, for feil i mottakerposisjon (b) ± 1 m, (c) ± 5 m og (d) ± 10 m.



Figur 5.37: Sann og estimert vannmetning etter 2 og 4 år med produksjon, beregnet fra Archies lov med 10% støy i dataene (SLN-Born).

bakgrunnsinformasjon til 4D CSEM-undersøkelsene. 4D brukes til å finne udrenerte segmenter for å øke utvinningen av hyrdokarboner fra reservoaret (IOR/EOR). Etter nye innsamlinger, oppdateres geomodellen iterativt. Det utføres forovermodelleringer til det er god tilpassning mellom de modellerte dataene fra den aktuelle geomodellen, og de innsamlede dataene. For å få mest mulig informasjon ut av 4D CSEM-data, benyttes CSEM sammen med blandt annet seismikk og brønnndata. Kostnader i forbindelse med datainnsamling og annet arbeid begrenser bruken av 4D CSEM. Resultatene presentert i denne masteroppgaven viser at 4D CSEM kan være nyttig og gi god informasjon dersom forholdene ligger til rette. Det er viktig å ta hensyn til alle faktorer som påvirker inversjonen for å oppnå et godt resultat.

Kapittel 6

Diskusjon og konklusjon

6.1 Forovermodellering

Forovermodellering ved integralligningsmetoder ble testet ut for to tilnærminger av det elektromagnetiske feltet, SLN- og Born-metoden. Sammenlignet med den fulle integralløsningen av feltet for en lagdelt bakgrunnsmodell, med simulerte metningsverdier for et reservoar i produksjon, var både SLN og Born dårlige tilnærminger av det anomale elektriske feltet. Begge tilnærmingsmetodene bygger på antagelsen av små kontraster mellom reservoarcellene og bakgrunnsmodellen, og viser bedringer i feltberegningene over tid, ettersom reservoaret blir mer vannfylt fra vanninjeksjon. Kun dersom reservoaret er 70% vannfylt, vil tilnærmingsmetodene beregne et felt nær FI-løsningen.

For å undersøke Born og SLN ved ulike konduktivitetskontraster, er feltet i en enkelt mottaker beregnet som funksjon av $\Delta\sigma$. Born øker lineært med $\Delta\sigma$ når $\Delta\sigma > 0$, og vil for store kontraster være en ubrukelig tilnærming. SLN avhenger av verdien til $\Gamma_0 E^{(0)}$, og vil gå mot null når $\Delta\sigma$ går mot uendelig. SLN vil modellere oppførselen til ΔE med hensyn til $\Delta\sigma$. Fasen til signalet er for SLN og Born konstant ved varierende konduktivitetskontrast, fordi fasen i tilnærmingsmetodene kun avhenger av bakgrunnsfeltet, som vil være lik for alle konduktivitetskontrastene (i motsetning til ΔE i FI-løsningen).

4D CSEM anomalier benyttes til reservoarovervåking for å studere bevegelsen av vannfronten og drenering av reservoaret. Endringen i konduktivitet, $\Delta\sigma^{(r-b)}$, mellom to tidssteg, vil være positiv dersom vannet som injiseres leder elektrisk strøm bedre enn hydrokarbonene som pumpes ut. Ved store endringer vil Born bli mer unøyaktig, men små endringer vil likevel tale til fordel for tilnærmingsmetodene som er best for små kontraster og små volum. For differansedataene i de tre tidsstegene som er undersøkt, er feilen i forhold til FI-løsningen større

enn ved hver enkelt feltmåling.

6.2 Inversjon i syntetisk eksempel

Inversjon av 3D CSEM data undersøkes ved forovermodellering av det anomale elektriske feltet for et reservoar i en homogen bakgrunnsmodell. Det er mange faktorer som påvirker inversjonsresultatene. Reservoardyp, mottaker- og kildegeometri, konduktivitet i bakgrunnsmodellen, geometri og konduktivitetsfordeling i reservoaret og nøyaktigheten til tilnæringsmetodene for å nevne noen. For å studere hvordan disse påvirker, utføres en kvalitativ analyse av inversjonen ved å endre på ulike parametre under forovermodelleringen i feltmålingene.

Datastøy er en viktig faktor, der økende støy vil gi mer unøyaktige inversjonsresultat. Der som data og operatormatrisen vektes med den inverse av kovariansmatrisen til dataene, vil inversjonen likevel tåle store mengder støy. For å dempe tilfeldig støy, er det mulig å samle inn mange datasett ved hver undersøkelse og “stacke” dataene. Dette kan være vanskelig å utføre i praksis, men med faste havbunnsinstallasjoner kan det la seg gjøre.

Av inversjonseksempelene er det tydelig hvordan modellfeil kan påvirke inversjonsresultatene. Ved SLN-forovermodellering og Born-inversjon, estimeres gode modeller når modellparametrene til SLN og Born har lignende verdier, mens for en annen modell kan inversjonsresultatene gi ubrukelige estimat. Inversjonene for de enkelte målingene er noe bedre ved SLN-SLN, enn Born-Born. Monte Carlo simulering viser en avtagende feil i estimerte modellparametre etter inversjon fra t -verdi til tilsvarende $\Delta\sigma$ -verdi. For 4D anomalier viser simuleringen en omvendt trend, tilfeller hvor $\Delta\sigma > 0$ S/m. Forskjellen mellom en repetert undersøkelse og basisundersøkelsen vil etter et lenger tidsintervall integreres over et større volum med en totalt større endring i konduktiviteten. Tilnæringsmetodene vil derfor være mer nøyaktige ved forovermodellering og inversjon over tette tidsintervall.

Inversjonsresultatene klarer ikke å estimere olje-vannkontakten så godt som ønsket. Konduktivitetsverdiene blir estimert bra, men ut mot kanten av reservoaret er estimatene dårligere. Flertydigheten som eksisterer skaper problemer for inversjonen, det kan finnes flere konduktivitetsmodeller som genererer like data.

De beste resultatene oppnås for grunne anomale volum, med høyest mulig frekvenser for best mulig oppløsning. Inntreningsdypet til signalet bør være på størrelsesorden til reservoardypet, slik at det anomale feltet ikke dempes før det når mottakerne. Fordelen med høyere frekvenser er bedre oppløsning og bedre muligheter til å avbilde vannfronten mer korrekt. I alle forsøkene er antall datapunkt større enn modellparametre, og videre øking av mottakerposisjoner

har liten påvirkning på inversjonsresultatet. Ut i fra de syntetiske forsøkene, anbefales faste mottakerinstallasjoner på havbunnen. Feilplassering av mottakere i repeterte undersøkelser har stor påvirkning på inversjonsresultatene, selv med ± 5 meter reduseres oppløsningen og modellparametrene blir feilestimert.

Grunnere anomale volum gav mer stabile inverse problem med lavere singulære verdier. Opp-løsningen ble bedre og vannfronten i den estimerte modellen blir nærmere den sanne vannfron-ten. I praksis kan CSEM benyttes i andre sammenhenger enn leting og reservoarovervåking, hvor grunnere objekter skal undersøkes. For eksempel er det viktig å kartlegge grunne gass-lommer eller sementert sandstein i forbindelse med boring og brønnplanlegging.

Tillegg A

Matlab koder

Matlab kodene inkludert i dette kapittelet er de ulike kodene benyttet til modellring av data ved SLN og Born, og inversjonen av dataene hvor støy legges til, og den estimerte modellen finnes ved Tikhonov regularisering hvor data og operatormatrisen er vektet. For de ulike forsøkene endres støyen og datavektoren etter ønske. Programmene er

- **modelling.m** Modellering av dataene ved Born og SLN før (t_0) og etter 2 (t_1) og 4 (t_2) år med produksjon.
- **greens.m** Her beregnes greensfunksjonen for en homogen bakgrunnsmodell med horisontal elektrisk dipol (HED) kilde (Chew, 1995).
- **inversjon.m** Gjør lineær inversjon av data med eller uten vektning, hvor regulariseringsparameteren finnes ved **gcv** (Hansen, 2009). Beregner også kovariansmatrisen til modellparameterene dersom støyen i dataene er kjent (kjent kovarians/vektematrise).
- **montecarlo.m** Monte Carlo simulering, beregne hvordan feil i t -verdier vil forplante seg i den ikke-lineære inversjonen til $\Delta\sigma(t)$.

```
1
2 % modelling.m
3 clear all, close all
4
5 % ----- Mottaker posisjoner -----
6 mottakere = 35; rekker = 13; M = mottakere*rekker;
7 r1 = 100 ; r2 = -600; r3 = 40;
8 dx = 100; dy = 100;
```

```

9  R = zeros(3,M);
10 t = 0;
11 for rr = 1:rekker
12     for mm = 1:mottakere
13         t = t+1;
14         R(1,t) = r1 + (mm-1)*dx;
15         R(2,t) = r2 + (rr-1)*dy;
16         R(3,t) = r3;
17     end
18 end
19
20 x = linspace(r1,r1*mottakere,mottakere);
21
22 % ----- Sprede posisjoner og antall -----
23 A = 16; B = 16; N = A*B;
24 s1 = 800; s2 = -400; s3 = 500+r3;
25 ds1 = 50; ds2 = 50; ds3 = 13;
26
27 S = zeros(3,N);
28 t = 0;
29 for aa = 1:A
30     for bb = 1:B
31         t = t + 1;
32         S(1,t) = (s1+(ds1/2)) + (aa-1)*ds1;
33         S(2,t) = (s2+(ds2/2)) + (bb-1)*ds2;
34         S(3,t) = s3;
35     end
36 end
37
38 % ----- Matrisen eb -----
39 kilde_styrke = 100*1000;
40 kilde_vektor = [kilde_styrke 0 0]';
41 rows = 3*N;
42 columns = N;
43 eb = zeros(rows, columns);
44
45 for nc = 1:columns
46     Eb = greens(S(1:3,nc))*kilde_vektor;
47     eb(nc,nc) = Eb(1);
48     eb(nc+N, nc) = Eb(2);
49     eb(nc+2*N, nc) = Eb(3);
50 end
51
52 % ----- Greens tensoren -----

```



```

53 G4 = zeros(3, 3, M, N);
54 for p = 1:M
55     for q = 1:N
56         scatterer_mottaker_avstand = R(1:3,p) - S(1:3, q);
57         tmp = greens(scatterer_mottaker_avstand);
58         for i = 1:3
59             for j = 1:3
60                 G4(i,j,p,q) = tmp(i,j);
61             end
62         end
63     end
64 end
65
66 G2 = zeros(3*M, 3*N);
67 for i = 1:3
68     for j = 1:3
69         for p = 1:M
70             for q = 1:N
71                 I = (i-1)*M + p;
72                 J = (j-1)*N + q;
73                 G2(I,J) = G4(i,j,p,q);
74             end
75         end
76     end
77 end
78
79 volume_single_grid_block = ds1*ds2*ds3;
80 G2 = volume_single_grid_block*G2;
81
82 % ----- G-matrisen -----
83 G = G2*eb;
84
85 % ----- Sann modell -----
86 phi = 0.17;
87 [sigma_a0,sigma_a1,sigma_a2] = timelaps(phi);
88 sigma_b = ones(size(sigma_a0));
89 d_sigma0 = sigma_a0 - sigma_b;
90 d_sigma1 = sigma_a1 - sigma_b;
91 d_sigma2 = sigma_a2 - sigma_b;
92
93 % ----- t-matrisen -----
94 t0 = d_sigma0.*(3*sigma_b./(d_sigma0 + 3*sigma_b));
95 t1 = d_sigma1.*(3*sigma_b./(d_sigma1 + 3*sigma_b));
96 t2 = d_sigma2.*(3*sigma_b./(d_sigma2 + 3*sigma_b));

```

```

97
98 % ----- Modellere dataene -----
99 %   SLN
100 dt0 = G*t0;
101 dt1 = G*t1;
102 dt2 = G*t2;
103 %   Born
104 db0 = G*d_sigma0;
105 db1 = G*d_sigma1;
106 db2 = G*d_sigma2;

```

```

1 % GREEN'S TENSOR
2 % Green's tensor for elektrisk dipol i et uniformt konduktivt medium,
3 % forskyvningsstrømmer er neglisjert, benytter høyrehands kartesisk
4 % koordinatsystem.
5
6 function G = greens(x);
7
8 I0 = 1;
9 dl = 1;
10 f = 0.25;
11 omega = 2*pi*f;
12 mu0 = 4*pi*1E-7;
13 sigma_b = 1;
14
15 k = sqrt(1i*omega*mu0*sigma_b);
16 R = norm(x);
17 g = 1i*omega*mu0*I0*dl*exp(1i*k*R)/(4*pi*R);
18
19 E = 1/(k^2)*1/(R*R)*g;
20 Et = E*(k*k*R*R + 1i*k*R - 1);
21 Ert = E*(-3*1i*k + 3/R - R*k*k)*(1/R);
22
23 Exx = Ert*x(1)*x(1) + Et;
24 Exy = Ert*x(1)*x(2);
25 Exz = Ert*x(1)*x(3);
26
27 Eyx = Exy;
28 Eyy = Ert*x(2)*x(2) + Et;
29 Eyz = Ert*x(2)*x(3);
30
31 Ezx = Exz;
32 Ezy = Eyz;

```

```

33 Ezz = Ert*x(3)*x(3) + Et;
34
35 G = [ Exx Exy Exz; Eyx Eyy Eyz; Ezx Ezy Ezz ];

```

```

1 function [mest,covm] = inversjon(dn,G,W)
2
3 [M,N] = size(G);
4
5 if nargin == 3
6     Gw = W*G;
7     dw = W*dn;
8     W2 = W'*W;
9     [Uw,Sw,Vw] = svd(Gw);
10    figure, reg_param = gcv(Uw,diag(Sw),dw); close
11    mest = inv(G'*W2*G + reg_param^2*eye(N))*G'*W2*dn;
12    mest = real(mest);
13    if nargin == 2
14        ginv = inv(G'*W2*G + reg_param^2*eye(N))*(W*G)';
15        covm = ginv*ginv';
16    end
17 else
18     [U,S,V] = svd(G);
19     figure, reg_param = gcv(U,diag(S),dn); close
20     mest = inv(G'*G + reg_param^2*eye(N))*G'*dn;
21     mest = real(mest);
22 end
23 return

```

```

1 function [tn,dsig] = montecarlo(t, sigma)
2
3 % Monte Carlo simulering.
4 % sigma = std(t) fra cov(t) eller velges selv
5
6 sigb = 1;
7
8 I = 1e4;
9 dsig = zeros(I,1);
10 for i = 1:I
11     tn(i) = t + sigma*randn;
12     dsig(i) = (-3*sigb*tn(i))/(tn(i) - 3*sigb);
13 end

```

```
14
15 figure, histfit(tn), title('tn')
16 std_tn = std(tn)
17 mean_tn = mean(tn)
18
19 figure, histfit(dsig), title('\Delta\sigma')
20 std_m = std(dsig)
21 mean_m = mean(dsig)
22
23 return
```

Bibliografi

- Aster, R. C., B. Borchers, og C. H. Thurber, 2005, Parameter estimation and inverse problems: Elsevier Academic Press.
- Bhuyian, A. H., 2009, Modelling and interpretation of marine controlled source electromagnetic data: PhD thesis, NTNU.
- Born, M., 1933, Optik: Springer-Verlag.
- Callin, C., Ø. Falch, K. T. Hetland, J. Pålsgård, og W. J., 1998, Fysikk 3fy, 2 ed.: Aschehoug.
- Charalambopoulos, A., G. Dassios, G. Perrusson, og D. Lesselier, 2002, The localized nonlinear approximation in ellipsoidal geometry: a novel approach to the low-frequency scattering problem: International Journal of Engineering Science, **40**, 67–91.
- Chave, A., A. Flosadóttir, og C. Cox, 1990, Some comments on seabed propagation of ulf/elf electromagnetic fields: Radio Science, **25**, 825–836.
- Chew, W. C., 1995, Waves and fields in inhomogeneous media: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.
- Constable, S., og L. J. Srnka, 2007, An introduction to marine controlled source electromagnetic exploration for hydrocarbons: Geophysics, **72**.
- Cutnell, J. D., og K. W. Johnson, 2007, Physics, 7 ed.: John Wiley and Sons, Inc.
- Eidesmo, T., S. Ellingsrud, L. M. MacGregor, S. Constable, M. C. Sinha, S. Johansen, F. N. Kong, og H. Westerdahl, 2002, Sea bed logging (sbl), a new method for remote and direct identification of hydrocarbon filled layers in deepwater areas: First break, **20**, 144–152.
- Ellingsrud, S., T. Eidesmo, S. Johansen, M. C. Sinha, L. M. MacGregor, og S. Constable, 2002, Remote sensing of hydrocarbon layers by seabed logging (sbl): Results from a cruise offshore angola: The Leading Edge, **21**, 972–982.
- Folland, G. B., 1992, Fourier analysis and its applications: Brooks/Cole Publishing Company.
- French, D., 2003, Analysis of the convergence behavior of the static localized nonlinear approximation for a problem in electromagnetism: Journal of Computational and Applied Mathematics, **161**, 27–39.
- Gelius, L.-J., 2007, A rock-physics approach to sea bed logging (sbl) modelling/inversion.:

- Presented at the Extended Abstract: The 8th China International Geo-Electromagnetic Workshop, Key Laboratory of Exploration Technologies for Oil and Gas Resources (KLE-TOR).
- , 2009, 3-d modeling of mcsem data employing various electromagnetic scattering approximations: SEG Houston 2009 International Exposition and Annual Meeting.
- Gueguen, Y., og V. Palciauskas, 1994, Introduction to the physics of rocks: Princeton University Press.
- Habashy, T., R. Groom, og B. Spies, 1993, Beyond the Born and Rytov approximations: a nonlinear approach to electromagnetic scattering: *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*, **98**, 1759–1775.
- Hansen, P., 1998, Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- , 2008, Regularization tools: A matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems, Informatics and Mathematical Modelling., Lyngby, Danmark.
- , 2009, Regularization tools version 4.1 (for matlab version 7.3).
- Hesthammer, J., A. Stefatos, M. Boalenko, S. Fanavoll, og J. Danielsen, 2010, Csem performance in light of well results: *The Leading Edge*, **29**, 34–41.
- Hohmann, G., 1975, Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling: *Geophysics*, **40**, 309.
- Hoversten, G., F. Cassassuce, E. Gasperikova, G. Newman, J. Chen, Y. Rubin, Z. Hou, og D. Vasco, 2006, Direct reservoir parameter estimation using joint inversion of marine seismic data and csem data: *Geophysics*, **71**, C1.
- Hursan, G., U. Takumi, og M. S. Zhdanov, 2006, Intem3dql. Consortium for Electromagnetic Modeling and Inversion, 1.0 ed.
- Hursan, G., og M. S. Zhdanov, 2002, Contraction integral equation method in three-dimensional electromagnetic modeling: *Radio Science*, **37**.
- Jakobsen, M., J. Hudson, og T. Johansen, 2003, T-matrix approach to shale acoustics: *Geophysical Journal International*, **154**, 533–558.
- Johansen, S. E., H. E. F. Amundsen, T. Røsten, S. Ellingsrud, T. Eidesmo, og A. H. Bhuyian, 2005, Subsurface hydrocarbons detected by electromagnetic sounding: first break, **23**, 31–36.
- Johansen, S. E., T. A. Wicklund, og H. E. F. Amundssen, 2007, Interpretation example of marine csem data: *The Leading Edge*, **26**, 348.
- Krebes, E. S., 2004, Seismic forward modeling: CSEG Recorder, 29–39.
- Lien, M., og T. Mannseth, 2008, Sensitivity study of marine csem data for reservoir production monitoring: *Geophysics*, **73**, F151.
- Maaø, F. A., 2007, Fast finite-difference time-domain modeling for marine-subsurface electro-

- magnetic problems: *Geophysics*, **72**, A19–A23.
- Menke, W., 1989, *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*: Academic Press, volume **45** of *International Geophysics Series*.
- Norman, T., H. Alnes, O. Christensen, J. Zach, E. O., og E. Tjøland, 2008, Planning time-lapse csem-surveys for joint seismic-em monitoring of geological carbon dioxide injection: Presented at the Extended abstract 1st EAGE CO2 Geological Storage Workshop, EAGE.
- Orange, A., K. Key, og S. Constable, 2009, The feasibility of reservoir monitoring using time-lapse marine csem: *Geophysics*, **74**, F21.
- Portniaguine, O., og M. Zhdanov, 1999, Focusing geophysical inversion images: *Geophysics*, **64**, 874–887.
- Seyffarth, H. C., 2009, Effect of erroneous representation og location and orientation of em receivers for monitoring of submarine petroleum reservoirs: Master's thesis, University of Bergen.
- Song, L., og Q. Liu, 2004, Fast three-dimensional electromagnetic nonlinear inversion in layered media with a novel scattering approximation: *Electromagnetic characterization of buried obstacles: Inverse problems*, **20**, 171–194.
- Stefatos, A., M. Boulaenko, og J. Hesthammer, 2009, Marine csem technology performance in hydrocarbon exploration - limitations or opportunities?: *first break*, **27**, 65–71.
- Sulak, R. M., 1991, Ekofisk field: The first 20 years: *Journal of Petroleum Technology*, **43**, 1265–1271.
- Torres-Verdin, C., og T. Habashy, 1994, Rapid 2.5-dimensional forward modeling and inversion via a new nonlinear scattering approximation: *Radio Science*, **29**.
- Yee, K. S., 1966, Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **14**, 302–307.
- Zach, J. J., M. Frenkel, D. Ridyard, J. Hincapie, B. Dubois, og J. Morten, 2009, Marine csem time-lapse repeatability for hydrocarbon field monitoring: Presented at the 2009 Technical Program, Society of Exploration Geophysicists.
- Zhdanov, M. S., 2002, *Geophysical inverse theory and regularization problems*: Elsevier, volume **36** of *Methods in Geochemistry and Geophysics*.
- Zhigang, W., H. Zhanxiang, S. Weibin, W. Yongtao, og L. Weifeng, 2008, Born approximation inversion for the marine csem data set: Presented at the SEG Las Vegas 2008 Expanded Abstracts.